Chap III. DETERMINATION DES EFFORTS INTERIEURS DANS LES STRUCTURES ISOSTATIQUES FORMEES DE BARRES

III. 1 SOLLICITATIONS DES SYSTEMES EN TREILLIS ISOSTATIQUES

Les methodes de calcul des efforts dans les barres ont été étudiées dans le cours de Statique. Rappelons qu'il existe 3 méthodes :
1. Methode des noeuds (CULMAN)
2. Methode des sections (RITTER)
3. Methode des figures reciproques (CREMONA)

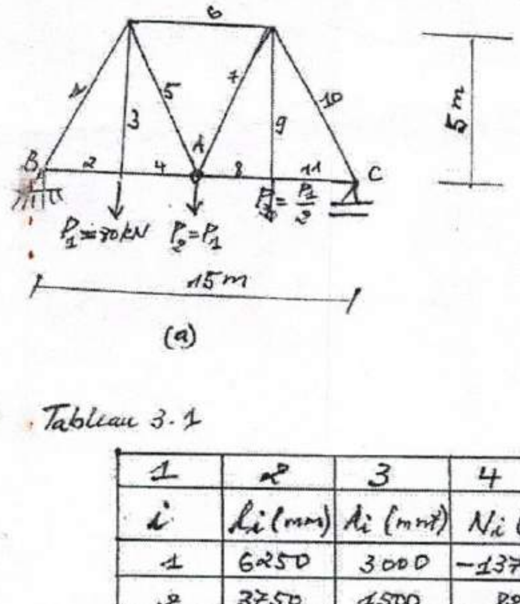
Ces methodes conviennent lorsque les charges sont fixes, lorsque les charges sont mobiles, il y a avantage d'utiliser les lignes d'influence des efforts (Voir chap. 4. 4.3)

III.2 DEFORMATION DES SYSTEMES EN TREILLIS ISOSTATIQUES

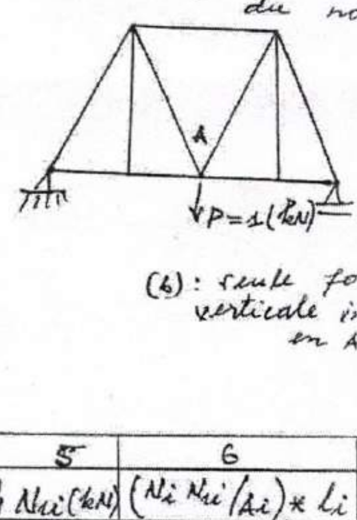
III.2.1 Calcul des deplacements des noeuds par le theorème de la force unité

a. Généralités

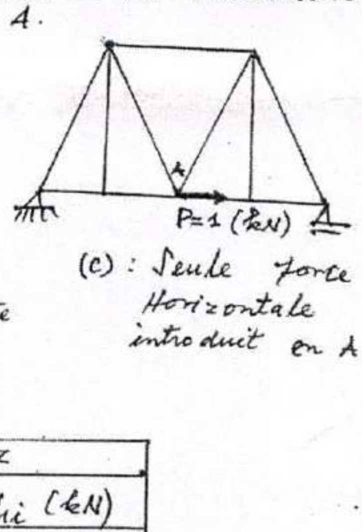
On demande de calculer le deplacement vertical et horizontal du noeud A.



(a)



(b) : seule force verticale introduite en A



(c) : Seule force Horizontale introduit en A

Tableau 3.1

1	2	3	4	5	6	7
i	l_i (mm)	A_i (mm²)	N_i (kN)	↓ N_{1i} (kN)	$(N_i N_{1i}/A_i) * l_i$	→ N_{1i} (kN)
1	6250	3000	−137,5	−0,625	179,0	0
2	3750	1500	82,5	0,375	77,5	1
3	5000	1000	80,0	0	0	0
4	3750	1500	82,5	0,375	77,5	1
5	6250	1000	37,5	0,625	146,5	0
6	7500	2000	−105,0	−0,750	295,0	0
7	6250	1000	62,5	0,625	244,0	0
8	3750	1500	67,5	0,375	63,5	0
9	5000	1000	40,0	0	0	0
10	6250	3000	−112,5	−0,625	146,5	0
11	3750	1500	67,5	0,375	63,5	0

$$1 \cdot d = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot N_{1i}}{E A_i} l_i$$

Hugues Kumeso

C.S 20.

$$\sum_{i=1}^{11} \frac{N_i N_i' l_i}{A_i} = 1292{,}5 \ kN/mm$$

$$d_A = \frac{1292500}{190.000} = 6{,}8 \ mm$$

où E = 190 000 N/mm² au lieu de 210. 000 N/mm².

~~Nous~~ D'après le th. de la force unité (2.30), le déplacement d'un noeud quelconque j dans la direction Δ_j ~~est~~ donné par la formule

$$\boxed{1 \cdot d_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i N_i' l_i}{E A_i}} \quad (3.1)$$

où n = nbre total des barres du treillis
N_i = sont des efforts réels dans le treillis sous l'effet des charges données
N_i' sont les efforts dans le même treillis sous l'effet d'une force unitaire subie appliquée au noeud j dans la direction Δ_j

Les calculs de l'expression (3.1) s'effectuent sous forme de tableau.
Le calcul de la force Ni produite dans la barre i du treillis par les charges extérieurs P_1, P_2, P_3 (doit) peut se faire par la statique (Méthode de culmann, de Ritter ou de cremona) ces forces sont données dans la colonne 4 du tableau ci-dessus.

3.2.1.2. Exemples de calcul du déplacement d'un noeud.

A. Soit à calculer le déplacement vertical du noeud A Fig 3.1. a. Les efforts N_i' indiqués dans la colone 5 du tableau ci-dessus s'obtiennent par la statique, pour la sollicitation présentée à la figure 3.1. b i.e toutes les charges extérieures étant enlevées et une charge unitaire verticale appliquée au noeud A. Dans la colonne 6 sont indiqués les produit $\frac{N_i N_i' l_i}{A_i}$, calculés à l'aide des données des colones de 2 à 5. En faisant la somme de ces produits et en divisant par le module d'élasticité E, on trouve le déplacement vertical du noeud A. Dans ce cas on trouve :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i N_i' l_i}{A_i} = 1292,5 \text{ kN/mm};$$

$$d_A = \frac{1292500}{190\ 000} = 6,8 \text{ mm}$$

où $E = 190\ 000 \text{ N/mm}^2$ au lieu de $210\ 000 \text{ N/mm}^2$ (voir rmq § 3.2.1.3.

B. Soit à calculer le déplacement horizontal du noeud A. Nous appliquons en ce point une force horizontale unitaire (voir Fig 3.1. c). Les valeurs de N_i' sont données dans la colonne 7 du tableau. 3.1. En introduisant ces forces dans l'équation 3.1. On trouve le déplacement horizontal de A, qui est la somme des allongements des barres 2 et 4.

Hugues KUMESO

$$d_h = \frac{1}{E}\left(\frac{N_2 L_2}{A_2} + \frac{N_4 L_4}{A_4}\right) = \frac{2 \times 82500 \times 3750}{1500 \times 190\,000}$$

$$= 2{,}17 \text{ mm}$$

C. Calcul du déplacement d'un noeud : cas général

Même procédure, sauf que la charge unitaire sera dirigée suivant la direction du ~~[illegible]~~ déplacement défini.

3.2.1.3. Remarques

~~Rem~~

1. Dans les calculs des déformations les normes Belges N.B.N. 1 et N.B.N. 5 demandent d'adopter pour les treillis en acier rivés ou boulonnés (boulons ordinaires) une valeur de $E = 190\,000 \text{ N/mm}^2$ pour tenir compte des légers glissements qui se produisent dans des tels assemblages. Pour les treillis soudés ou assemblés par boulons à haute résistance où il n'y a pas de glissement, on prendra la valeur exacte de $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$

2. Si l'on désire déterminer le déplacement d'un point d'1 treillis dans une direction donnée, en tenant compte à la fois de l'effet des forces appliquées, d'une variation de température et d'un mvt d'appuis, on procède comme suite :

a. On étudie à part, les déplacements dûs aux forces appliquées par le th. de la force unité, avec prise en compte du tassement par la formule 2.34.

$$1 \cdot d = \sum \frac{NN'}{EA} l + \sum R' r$$

$$d_h = \frac{1}{E}\left(\frac{N_2 L_2}{A_2} + \frac{N_4 L_4}{A_4}\right) = \frac{2 \times 82500 \times 3750}{1500 \times 190\,000}$$

$$= 2{,}17 \text{ mm}$$

C. Calcul du déplacement d'un noeud : cas général

Même procédure, sauf que la charge unitaire sera dirigée suivant la direction du ~~déplacement~~ déplacement défini.

3.2.1.3. Remarques

1. Dans les calculs des déformations les normes Belges N.B.N. 1 et N.B.N. 5 demandent d'adopter pour les treillis en acier rivés ou boulonnés (boulons ordinaires) une valeur de $E = 190\,000$ N/mm² pour tenir compte des légers glissements qui se produisent dans des tels assemblages. Pour les treillis soudés ou assemblés par boulons à haute résistance où il n'y a pas de glissement, on prendra la valeur exacte de $E = 210\,000$ N/mm²

2. Si l'on désire déterminer le déplacement d'un point d'1 treillis dans une direction donnée, en tenant compte à la fois de l'effet des forces appliquées, d'une variation de température et d'un mvt d'appuis, on procède comme suit :

a. On étudie à part, les déplacements dûs aux forces appliquées par le th. de la force unité, avec prise en compte du tassement par la formule 2.34.

$$1 \cdot d = \sum \frac{NN'}{EA} l + \sum R' r$$

Chap. 4. THEORIE GENERALE DES LIGNES D'INFLUENCE

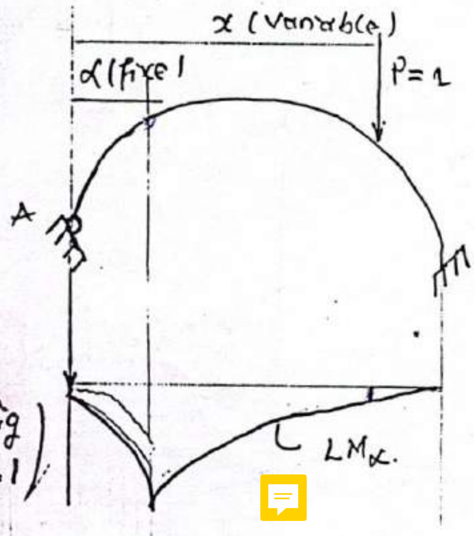
4.1. Notions fondamentales.

4.1.1. Nécessité d'une méthode spéciale

Dans le cas des charges mobiles, pour une section droite déterminée et un effet i.e une sollicitation ou une déformation déterminée, par ex le moment fléchissant ou la flèche d'une section donnée d'une poutre, la position de la charge qui provoque (le maximum) la théorie des lignes d'influence permet de déterminer la position des charges qui provoque le maximum ou le minimum de l'effet considéré ~~dans la destruction~~ et le chiffrer.

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux structures à plan moyen et système des charges verticales.

4.1.2. Notion de la ligne d'influence.



(Fig 4.1)

Considérons fig. 4.1. une poutre qlcq parcourue par une force unitaire P = 1 (unité importe peu) et considérons un effet déterminé par ex le moment fléchissant produit par cette force unitaire dans la section d'abscisse α.

On appelle ligne d'influence de cet effet dans la section considérée (α) la courbe telle que son ordonnée l.5

$$1.\ d_T = \Sigma N'\alpha T l + \Sigma R' r_T .$$

où r_T : représente les déplacements projetés supplémentaires des appuis provoqués par les variations de température ;

c. En additionnant membre à membre les 2 formules ci-dessus, on a :

$$\boxed{1.\ d_t = \Sigma\left(\frac{Nl}{EA} + \alpha T' l\right) N' + \Sigma R'(r + r_T)} \quad (3.2)$$

fin chapitre.

Prenons par ex le cas d'un arc bi-encastré fig. 4.2 et supposons que les charges soient transmises à l'arc par l'intermédiaire d'1 tablier et des montants régulièrement espacés. Les longrines de tablier sont supposées simplement appuyées à leurs deux extrémités sur les traverses au-dessus des montants. Soit $Li M_0$ la LI du moment d'encastrement déterminée ds l'hypothèse où les charges agissent directement sur l'arc.

Une charge P sur la seconde longrine par ex fig 4.2 se compose de 2 charges partielles P_1 et P_2 agissant au droit des montants 1 et 2 respectivement. On a :

$$P_1 y_1 + P_2 y_2$$

Si y_1 et y_2 sont les ordonnées de la ligne d'inf. au droit des montants 1 et 2, l'effet produit par la charge P, vaut :

$$\boxed{P_1 y_1 + P_2 y_2 = \frac{P((c-x)y_1 + xy_2)}{c}} \quad \eta$$

On obtiendrait le m̃ effet, en supposant que la charge P se déplace sur une n^velle $L.I$ d'ordonnée $\eta = \frac{(c-x)y_1 + xy_2}{c}$.
cette équation représente la dte passant A et B. En effet, pour $x = 0$ et $x = c$, on a respectivement $\eta = y_1$ et $\eta = y_2$.

Ce raisonnement est valable pour n'importe quelle longrine, d'où le théorème :

" Si les charges sont transmises au système par l'intermédiaire des traverses, la $L.I$ d'un effet qlcq ds une section donnée s'obtient cne suit :

1. On cherche la $L.I$ de l'effet en supposant que les charges agissent directement ;

lue sous une position donnée de la charge, donne à une certaine échelle la valeur du moment de l'effet considéré. La ligne d'influence est donc une représentation graphique de la loi L_i effet $\alpha = f(x)$.

4.1.3. Utilisation des lignes d'influence. Recherche des effets maxima positifs et négatifs.

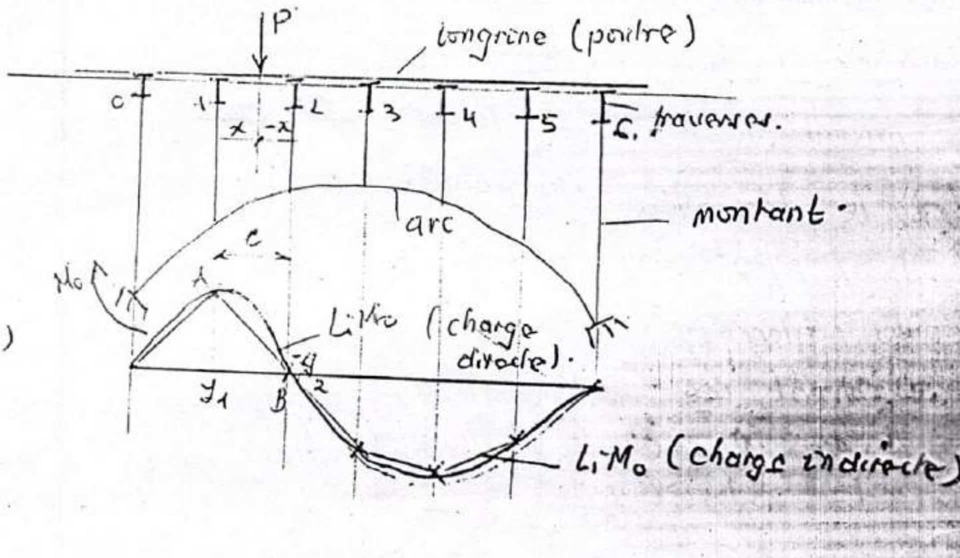
L'utilisation des L.I est basée sur le pcp de superposition des effets. L'effet produit par n forces concentrées $P_1, P_2, \dots, P_n$ placées en des endroits telles que les ordonnées correspondantes de la L.I soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ vaut:

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{n} P_i y_i}$$

Si on a affaire à des charges réparties suivant la loi $p = p(x)$ dans un intervalle $[a, b]$, l'effet produit vaut:

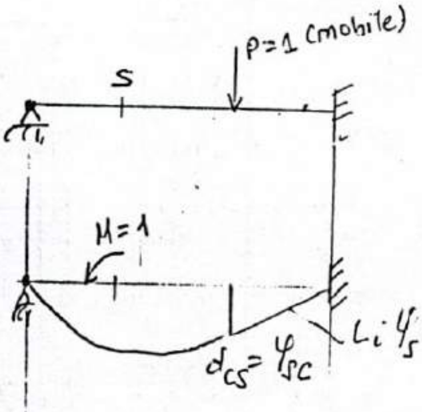
$$\boxed{Y = \int_a^b p(x) y(x) dx.}$$

4.1.4. Cas des charges transmises indirectement



(fig. 4.2)

S et de construire les diagrammes de déplaceo verticaux. Ces diagrammes représentent aussi la L.I de φ_S cherchée.



D'après le th. de Maxwell,

$$d_{CS} \cdot P_C = \varphi_{SC} M_S.$$

avec $P_C = M_S = 1$

$$d_{CS} = \varphi_{SC}$$

Ainsi donc : " La L.I de la rotation d'une secte S de la structure est donnée par l'ens. de déplace verticaux (i.e élastique ou déformée) de la structure déformée par un couple de moment unitaire appliqué à la secte S."

4.3. Procédé général pour rechercher la ligne d'influence d'une rx d'appuis ou d'un elt de réduction M, N, T dans un système isostatique.

4.3.1 Notion de coupure simple.

Dans la section droite d'une poutre, il ∃ 3 efforts intérieurs M, N et T dans le cas plan ; ces efforts sont des forces de liaison entre les deux faces de la section.
On peut donc associer à chacun d'eux une certaine liaison cinématique. Ainsi dans toute section d'une poutre, il ∃ 3 liaisons cinématiques auxquels correspondent les 3 efforts intérieurs et qui assurent la transmission de ces derniers à travers la section.

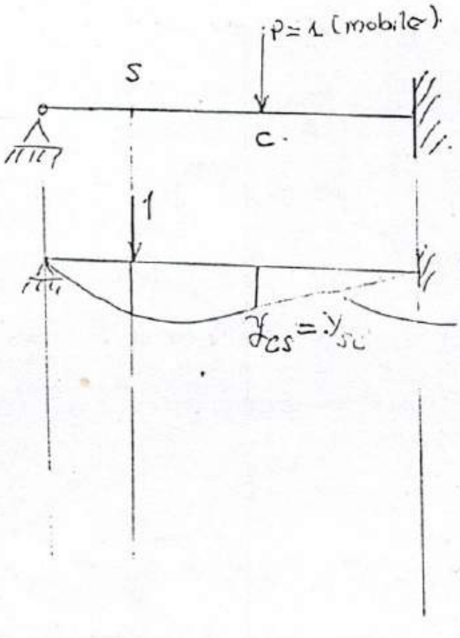
On appelle coupure simple dans une section ou en un appui, la suppression d'une liaison cinématique.

2. On trace les verticales au droit des travaves et on détermine leur pt d'∩ avec la dite L.I;

3. On inscrit dans ladite L.I le polygone passant par ces pts, qui représente la vraie L.I cherchée.

4.2. Lignes d'influence des effets géométriques.

(Déplacements ou rotation élastiques des sys. iso et hyperstatiques).



Supposons que l'on désire obtenir la L.I du déplacement verticale d'une section S d'une poutre qlcq voir fig. 4.3. Appliquons la charge verticale unitaire à la section S et traçons la ligne élastique de la poutre (déformée de la poutre). Dans cette ligne une ordonnée lue sous un pt C représente par construction le déplacement y_{CS} du pt C. provoqué par la charge unitaire placée à S.

Mais par le théorème de Maxwell, cette ordonnée représente aussi le déplacement ~~directe~~ y_{SC} du pt S provoqué par la charge unitaire placée à C. Par conséquent la ligne élastique est aussi la L.I que l'on recherche. Ainsi donc:

" La L.I du déplacement d'une section S de la structure, projetée sur une direction déterminée Δ et donnée par l'élastique de la structure déformée par une force unitaire de direction Δ, appliquée dans la section S "

D'une manière analogue, pour obtenir la L.I de la rotation φ_S d'une section S, il suffit d'appliquer un couple $M=1$ en

La figure b. montre les coupures simples (appliquées) pratiquées sur les appuis usuels.

4.3.2. Une application de la notion de coupure simple.

L'introduction d'une coupure simple dans une structure isostatique transforme celle-ci en un mécanisme à 1 degré de liberté. A l'aide du th. des déplacements virtuels, on peut l'employer pour trouver les efforts intérieurs M, N, T : il suffit de pratiquer la coupure simple relative à un effort déterminé dans une section fixe, d'introduire dans la coupure la paire d'efforts libérés (ceci s'appelle l'extériorisation de l'effort intérieur), de donner un déplacement virtuel d'ensemble cinématiquement admissible et d'écrire l'équation des travaux virtuels des corps indéformables :

$$\boxed{\delta W_e = 0}$$

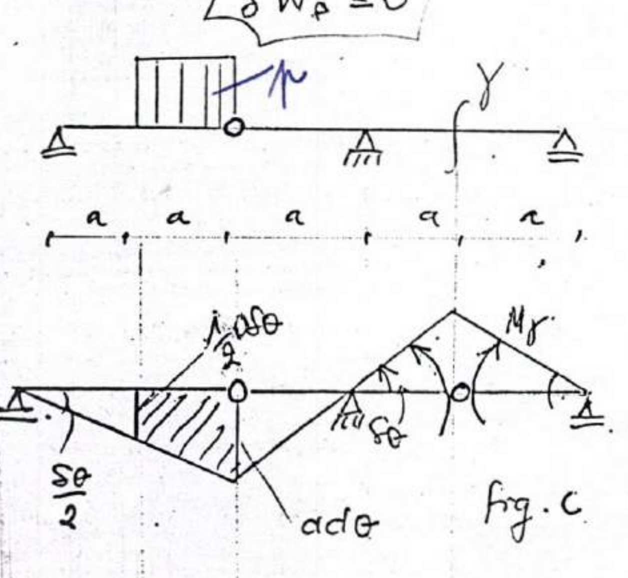


fig. C

$$\delta W_e = 2M_\gamma \delta\theta + p\frac{a}{2}\left(a\delta\theta + \frac{1}{2}a\delta\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow M_\gamma = -\frac{3pa^2}{8}$$

On note que le moment agit dans le sens inverse à celui supposé. Cette manière d'envisager le calcul des efforts intérieurs n'est ~~en~~ général pas la plus intéressante et ne sera envisagée qu'exceptionnellement. Mais l'idée ci-dessus est à la base de la théorie

Ngbo S.

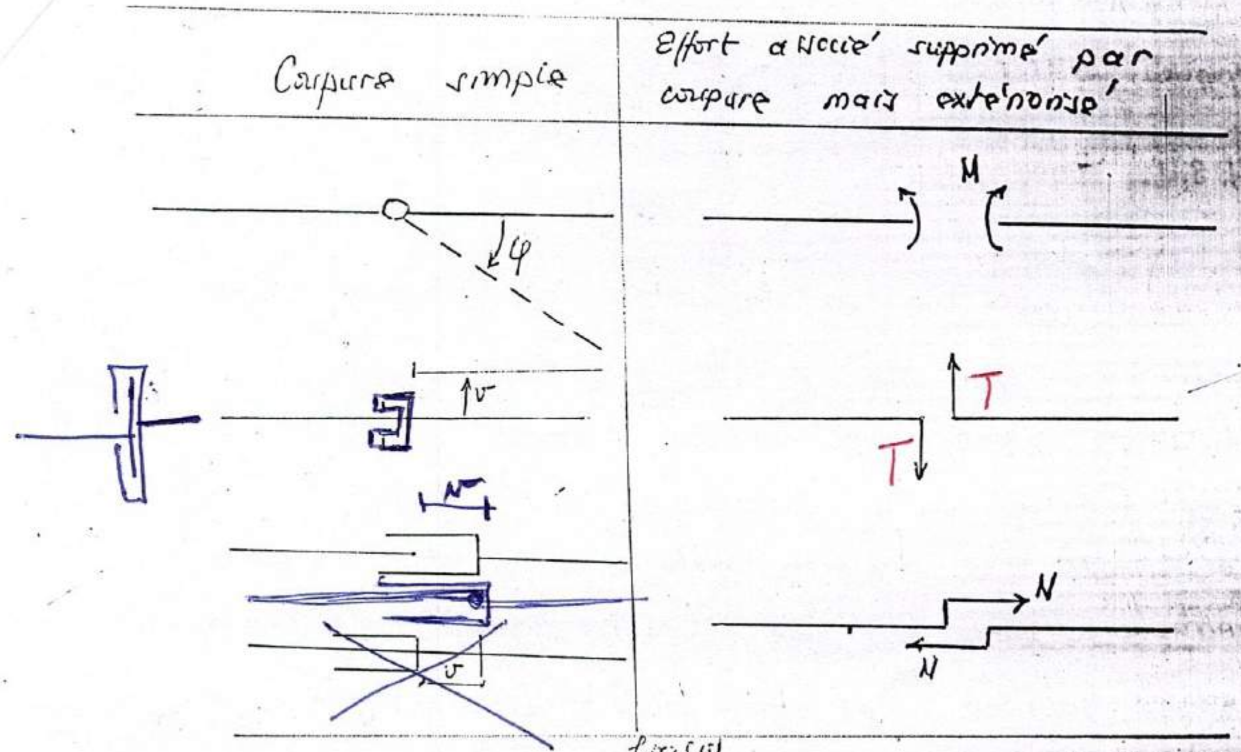


fig (a)

Voir la fig. a.

- la suppression de M s'obtient par l'introduction d'une circulate
- Celle de T par un dispositif à plateaux glissant (devant rester tjrs en contact)
- Celle de N par un système à piston.

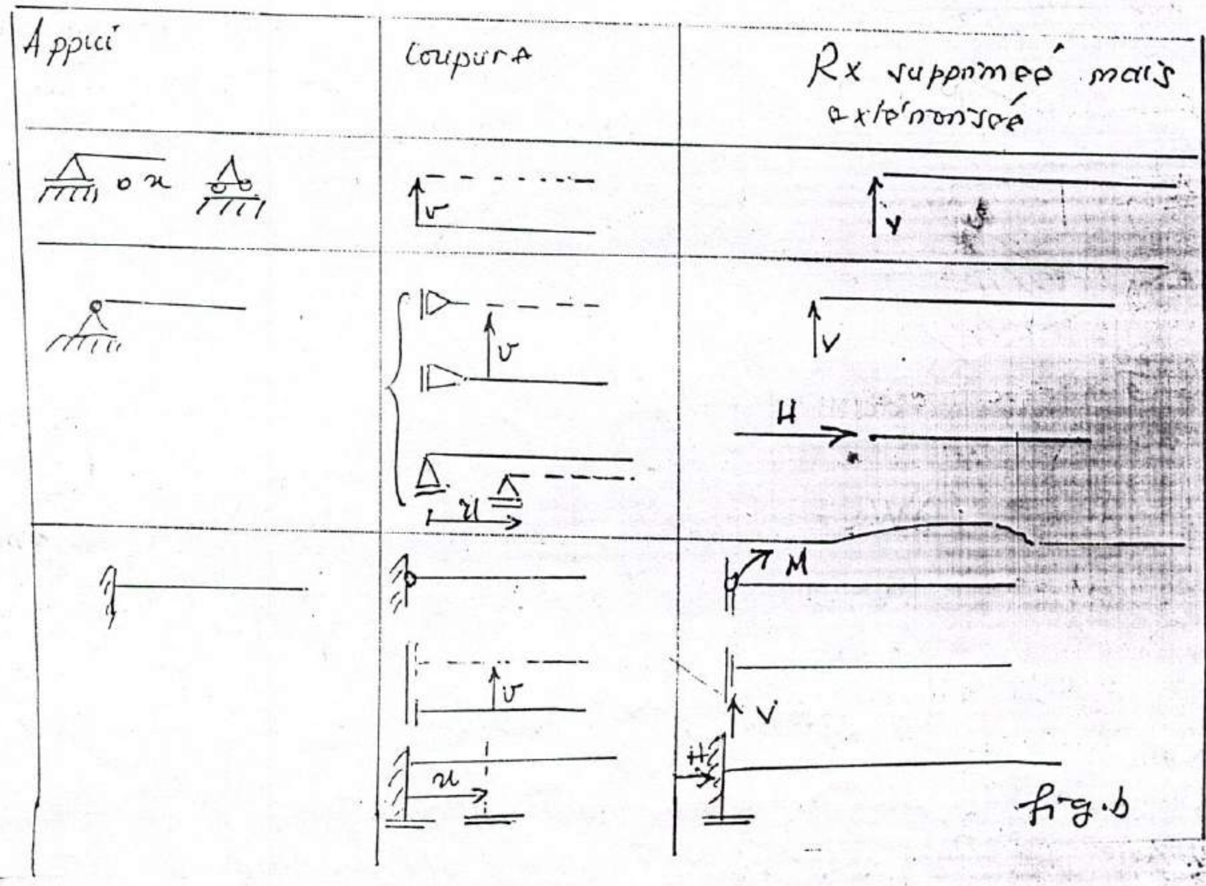


fig.b

d'où $R_c = \dfrac{P\delta y}{\delta v} = P.\dfrac{\eta}{1} = P\eta$

$$\frac{\delta y}{\delta v} = \frac{b}{a} \quad (4.0)$$

Le rapport sans dimension $\dfrac{R_c}{P}$ est donné par le rapport de l'ordonnées, rapport qui est indépendant de la valeur de δv puisque δy lui est directement proportionnel.

Si l'on choisi $\delta v = 1$ pour dessiner la déformée, $\dfrac{R_c}{P}$ vaudra l'ordonnée η quelque soit la position de la charge mobile.
La ligne brisée a-b-e (en 2 segments parce que 2 corps après coupure) est la ligne d'influence de R_c.

→ Lorsque plusieurs charges se trouvent sur la poutre, chacune possède de son ordonnée η_i (en valeur et en signe), de sorte qu'on détermine la réaction :

$$\boxed{R_C = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 + \dots + P_n\eta_n}$$

" <u>On appelle ligne d'influence d'un effet dans une section donnée une ligne telle que son ordonnée lue, sous une position de la charge donne la valeur de l'effet considéré.</u> "
Cherchons à présent (Fig.e) la ligne d'influence de M ds la section γ d'abscisse α fixe.

des lignes d'influence des systèmes isostatiques.

4.3.3. Recherche des lignes d'influence

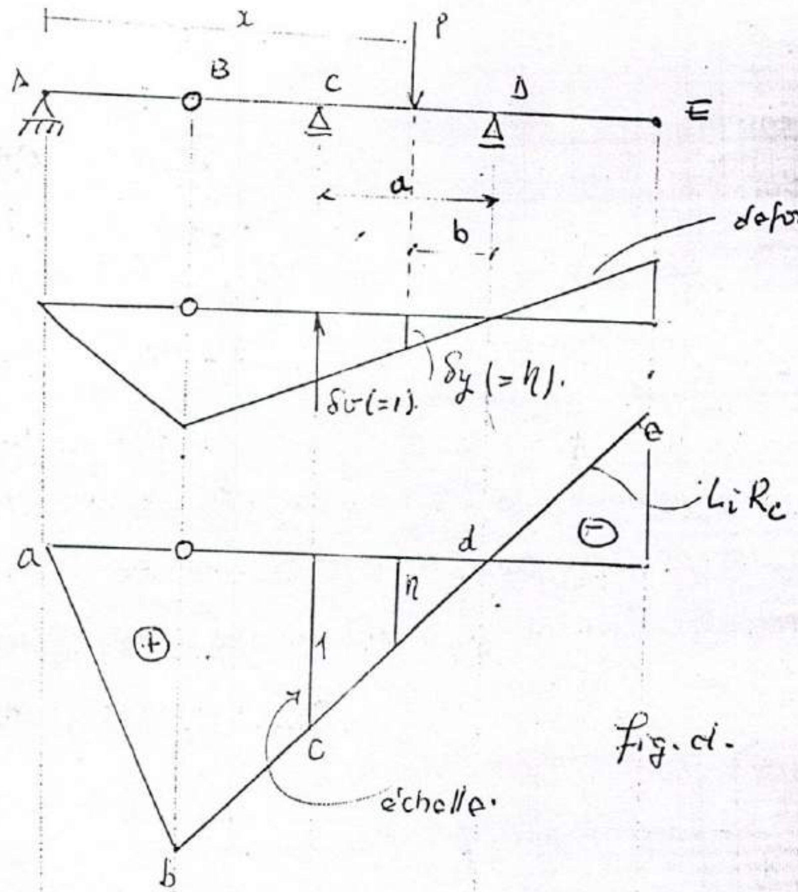


fig. d.

Considérons une poutre quelconque fig. d parcourue par une force P d'abscisse x variable et proposons-nous d'étudier la ligne d'influence de la réaction virtuelle R_c au point C par exemple.

Pratiquons la coupure simple relative à R_c et extériorisons R_c.

Imaginons un déplacement virtuel δv au point C dans le sens contraire de la force de coupure R_c qui remplace l'action de l'appui, nous obtenons la déformée virtuelle représentée. (Ce sont les droites pour les systèmes isostatiques).

On a :

$$\delta W_e = - R_c \, dv + P . \delta y = 0$$

structure ainsi transformée un déplacement virtuel cinématique admissible dans le sens contraire à celui dans lequel on mesure cet effet, tel que le déplacement de la coupure vale l'unité.
La configuration déformée virtuelle de la structure représente la L.I recherchée.

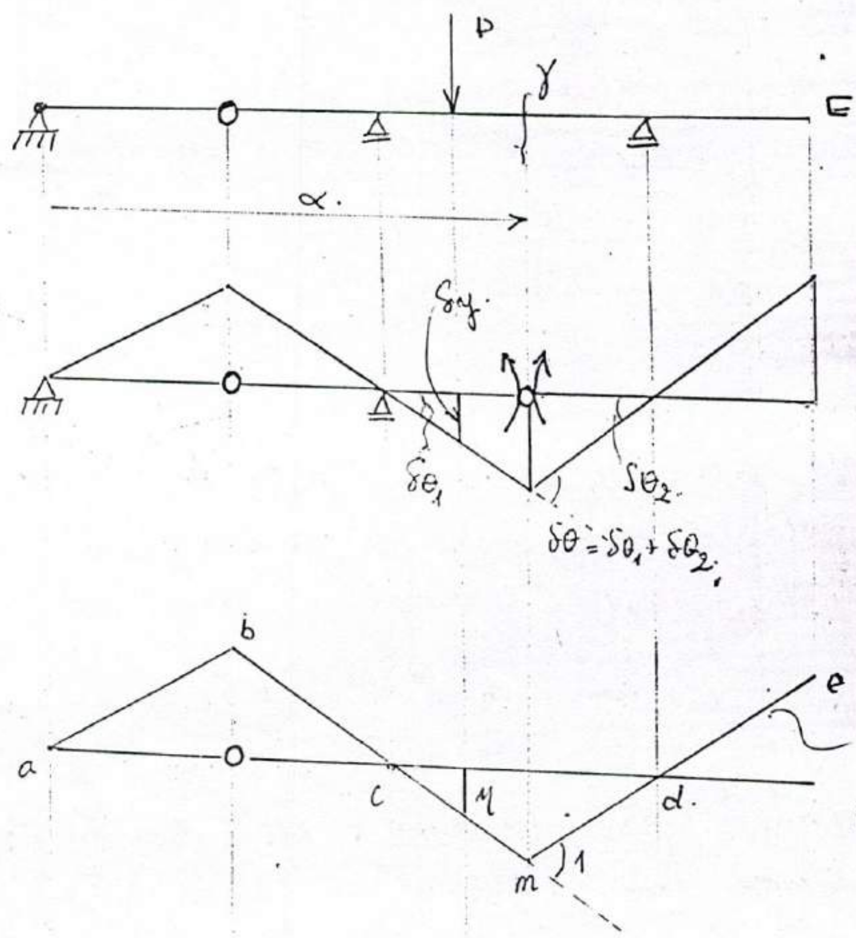
Cette règle générale issue du th. des déplacements virtuels des corps indéformable est une méthode cinématique permet le tracé direct et sans calcul (l'allure) de toute ligne d'influence.

Remarques:

- Si le déplacement relatif de la coupure n'est pas pris égal à l'unité sa valeur sera l'échelle de ligne d'influence.
- Il peut arriver que le tracé d'une ligne d'influence nécessite l'emploi de centre instantané de rotation, ce qui suppose une bonne connaissance de cette théorie, voir le cours de cinématique, en particulier le th. de Kennedy.
- Dans ces cas jugés trop compliqués par la méthode cinématique, l'application pure et simple de la définition générale de la ligne d'influence permet de tracer celle-ci par calcul direct de quelques ordonnées au moyen des considérations statiques.

4.3.4. Exemples.

1. Tracer les Li de la réaction en B, et de M et T dans la section γ de la poutre cantilever (continue mais isostatique) de la fig.

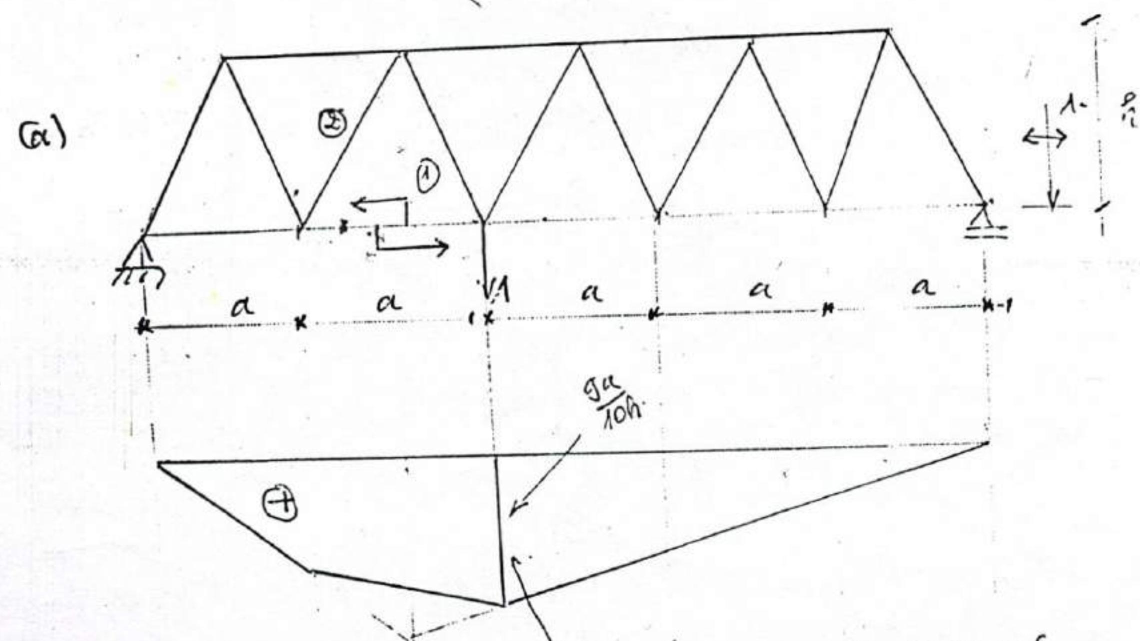


$\delta\theta = \delta\theta_1 + \delta\theta_2$.

$$\delta W_e = -M\,\delta\theta_1 - M\,\delta\theta_2 + P\,\delta y = 0$$

$$\Rightarrow\ -M\,\delta\theta + P\,\delta y = 0 \Rightarrow M = P\frac{\delta y}{\delta\theta} = \frac{M}{1}P.$$

Le rapport $\frac{M}{P}$ est indépendant de la valeur de $\delta\theta$ puisque δy lui est directement proportionnel. Si l'on choisit $\delta\theta = 1$ pour dessiner la déformée, $M = \delta\theta P$ quelque soit la position de la charge mobile. La ligne brisée a-b-m-e (trois segments puisqu'il s'agit de 3 corps après la coupure) est la ligne d'influence LiM_γ. Les unités des ordonnées de la ligne sont des longueurs. Pour faciliter l'obtention des lignes d'influence, on retiendra que : « pour trouver, dans une structure isostatique, la ligne d'influence d'un effet mécanique, on effectue la coupure simple relative à cet effet, puis on donne à la

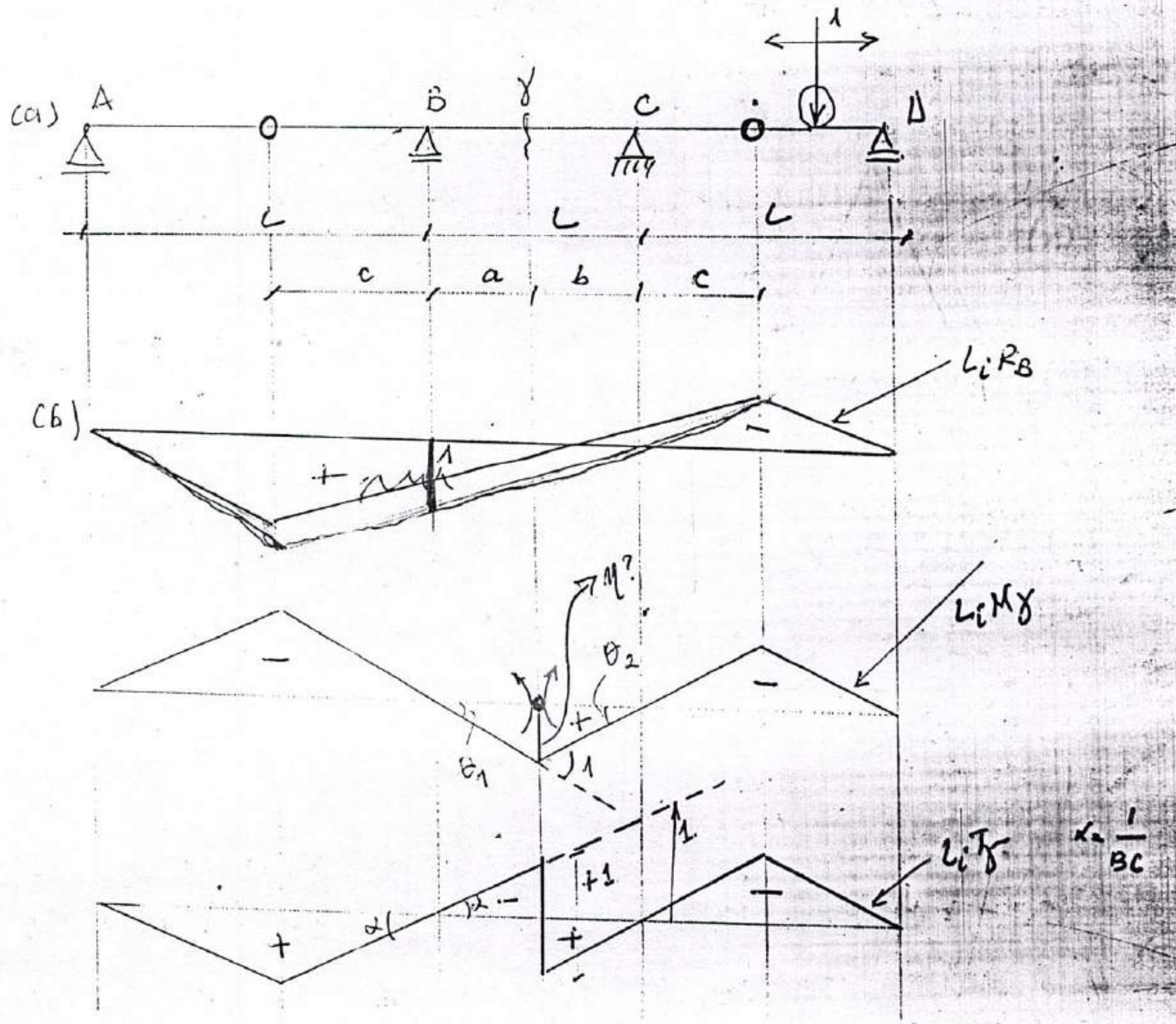


pour trouver cette ordonnée, on applique une charge verticale (1) voir fig, on calcule l'effort N dans la barre (1) (par Ritter). La valeur de N vaut l'ordonnée cherchée (Déf. de la Li).

4.3.5 Courbes enveloppes.

Pour dimensionner les éléments d'une structure (section de poutre ou dispositifs d'appuis) il est nécessaire de connaître les valeurs extrêmes des effets mécaniques (élts de réduction ou de réaction d'appuis) qui peuvent y régner. Il faut donc étudier un grand nombre des sections judicieusement espacées sur la longueur de la poutre et y déterminer les valeurs extrêmes algébriquement, des élts de réductions en chargeant les Li correspondantes de la façon la plus défavorable et en y ajoutant des effets des charges permanentes.

Une façon élégante de présenter le résultat de calcul est de tracer deux courbes dites courbes enveloppes dont les ordonnées donnent respectivement le maximum,



$\theta_1 \rightarrow \eta = \theta_1 . a \quad , \theta_2 = \dfrac{\theta_1 . a}{b.}$

$\theta_1 + \theta_2 = 1 \rightarrow \theta_1 + \dfrac{\theta_1 . a}{b} = \theta_1 \left(\dfrac{b+a}{b} \right) = 1$

$\Rightarrow \theta_1 = \dfrac{b}{b+a}$ d'où $\eta = \dfrac{b.a}{b+a} \rightarrow \eta = \dfrac{a \times b}{L}$

2. Tracer les Li des efforts dans les barres 1 et 2 de la poutre triangulée fig (i), la charge unité roule au niveau de la membrure inférieure.

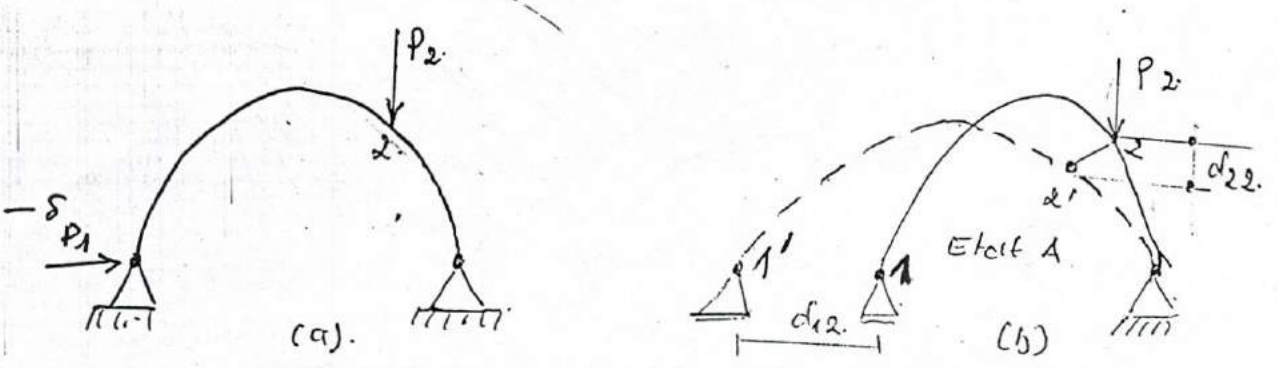


Fig. 4.4.

Désignons par P_2, la force mobile qui fait naître P_1, effectuons la coupure simple relative à P_1, dans l'exemple choisi, cela se fera en remplaçant la rotule de gauche par un chariot à libre dilatation. Le point 1 ira en 1' voir Fig 4.4.b soit d_{12} ce déplacement mesuré suivant P_1. Pour ramener 1' en 1 il faudra introduire en 1 une force P_1 égale à celle que la coupure a annulée i.e telque si elle agissait seule sur le système coupé et non chargé, elle produirait un déplacement d_{11} égale et contraire à d_{12} (voir Fig 4.4 c).

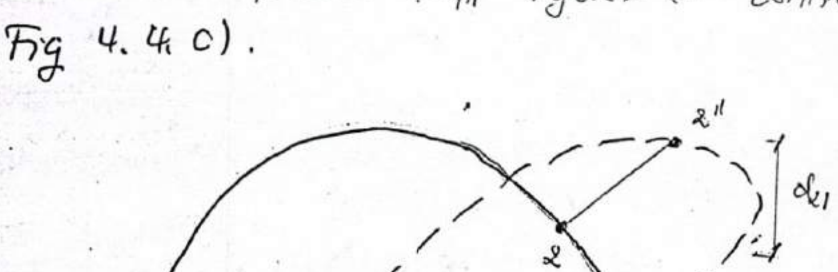


fig 4.4.(c)

cette valeur de P_1 créé par P_2 résulte de la condition $d_{12} + d_{11} = 0$ (a)
or d'après le th. de Maxwell ;

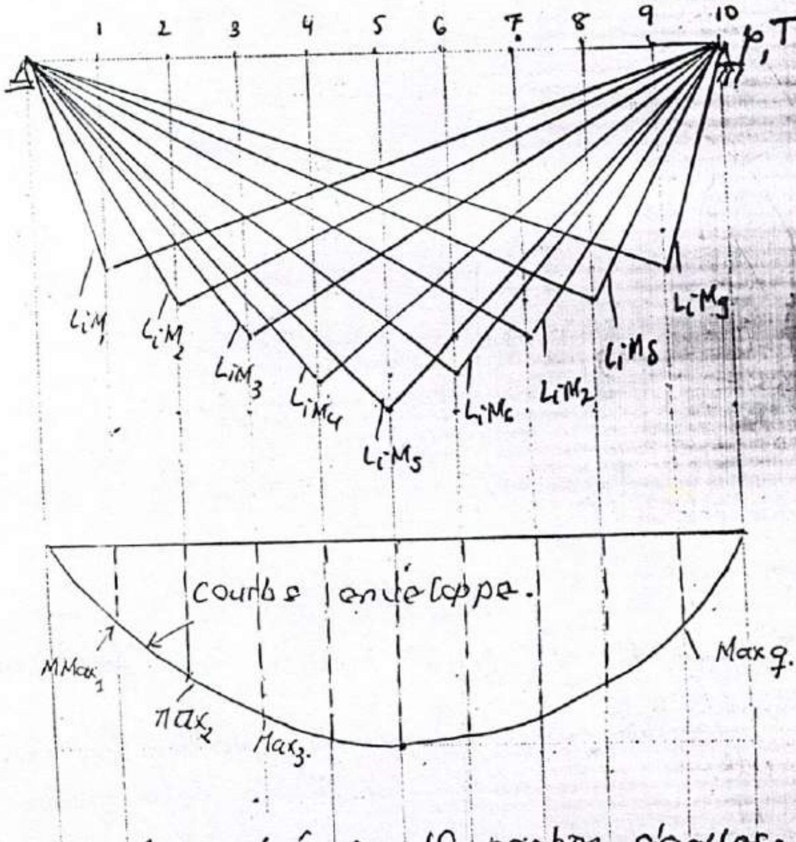
$$\frac{d_{12}}{P_2} = \frac{d_{21}}{P_1} \quad \text{ou} \quad P_1 = \frac{d_{21}}{d_{12}} P_2 \quad \text{ce qui avec (a)}$$

s'écrit : $P_1 = -\dfrac{d_{21}}{d_{11}} P_2$

Ngho Serges

CS.

Ex:



1. On subdivise la portée en 10 parties égales;
2. On trace la Li de l'effort dans chq section;
3. Pour chq Li, on cherche la valeur de l'effort max.

✓4.4. Procédé général pour chercher La Li d'une rx d'appui ou d'un eff M, N ou T dans un syst. hypers. th. de Land.

Grâce au th. de Maxwell, nous allons démontrer que les procédés pour chercher La L. Infl. d'un effet donné dans une section donnée dans un système isostatique peut s'appliquer sans modification à un syst. hyperst.

Soit P_1 l'eff (R, M, N ou T) dont on désire trouver la L-I dans une section donnée. Supposons pour fixer les idées que P_1 soit la poussée d'un arc à deux rotules au point 1.

Voir la fig (4.4.a).

En effet, pour ramener dans ce cas, le syst. coupure à son état initial, on ne peut pas ramener seulement le pt 1' à sa positⁿ initiale 1 puisque l'appui 1 est déformable.

Dans ce cas, la li d'une telle réacte est considérée comme ligne d'influence (L.I) secondaire à déterminer par la statique (voir ds la suite du cours).

Nous pouvons résumer ce qui précède par le th de Land suivant :

" Pour trouver la ligne d'influence d'un élément R, M, N ou T (R se rapportant à un appui fixe) dans un système hyperstatique à appuis fixes ou élastiques, on effectue la coupure simple relative à cet élément, et on fait agir sur le syst. ainsi préparé un élément (une force ou un moment, ou 2 forces et 2moments) dans le sens contraire de son sens positif. Les ordonnées de la Li cherchée sont données avec signe à une certaine échelle, par les déplacements verticaux du système coupure ainsi sollicitée. L'échelle de la Li est donnée par le déplacement relatif des 2 lèvres de la coupure."

Rmq. La calcul des Li est la plupart du temps plus long par la méthode de Land que par les procédés généraux de résolution des systèmes hyperstatiques exposé dans la suite du cours.

Ngho Serges

- Si $P_2 = 1$ cōā on doit tjrs la supposer dans la recherche de la ... de P_1, on trouve

$$P_1 = -\frac{d_{21}}{d_{11}} \quad (4.1).$$

Rmqs

a. L'expression (4.1) ne renferme que les déformations dues au déplacement M'' et est un rapport de deux de ces déformations, le rapport est donc indpdt de la grandeur de d_{11} car d_{21} lui est proportionnelle, et peut se calculer au moyen d'une valeur arbitraire de cette quantité;

b. Les déplacements d_{21} et d_{11} sont indpdts de la position de la force mobile P_2. On peut donc tracer la L.I sans tenir compte de la position de P_2;

c. Si ns voulons que le signe de P_1 soit celui de d_{21}, le signe de d_{11} doit être négatif d'où on donnera tjrs au pt 1 un déplacement d_{11} négatif (<0) c-à-d dirigé dans le sens inverse de celui de P_1. Par convention les déplacements verticaux positifs sont dirigés vers le bas.

d. On prendre cōē échelle de L.I d_{11} qui représente le déplacement relatif de deux lèvres de la coupure.

e. La formule (4.1) découle du th. de Maxwell, elle s'applique comme ce dernier à tous les systèmes élastiques reposant sur appuis fixe ou élastique, cependant elle n'est plus valable si l'elt recherché est la rx d'un appuis élastique.

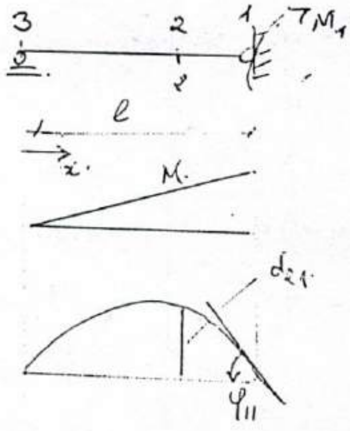
4.6. L_i primaire et secondaires

Il n'est pas nécessaire de rechercher toutes les L_i d'un syst. hyperst. par la méthode de Land. Il suffit de déterminer par cette méthode un nbre des L_i primaires égal au degré d'hyperstaticité du syst. On peut ensuite en déduire toutes les autres L_i celles dites secondaires par la statique. (voir la suite du cours).

– fin –

4.5. Exemples d'application

1. Soit à chercher la $l_i M_1$, dans une poutre droite prismatique encastrée en 1 et appuyée en 3. fig (4.5) par le théorème de Land.

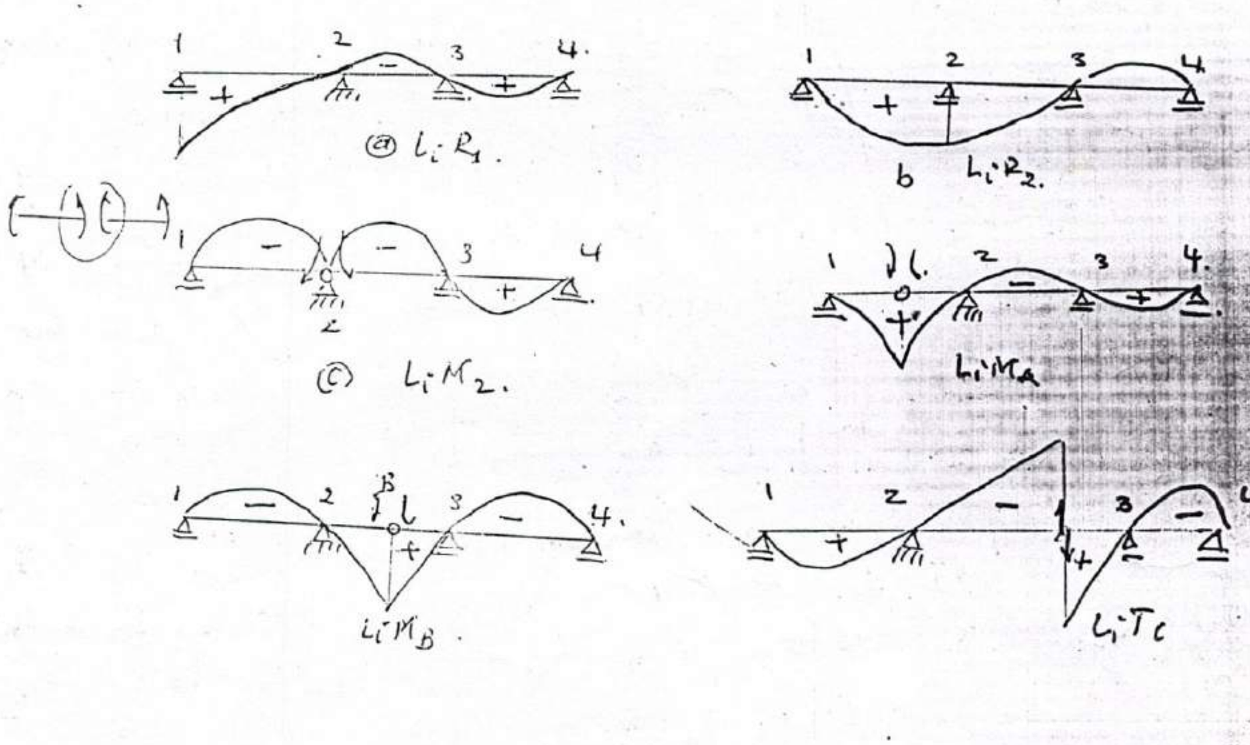


Réponse :

$$M = \frac{M_1}{l} x \; ; \; \varphi_{11} = \frac{M_1 l}{3EI} \; ; \; d_{21} = \frac{M_1 l x}{6EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - 1\right).$$

$$\text{éq. } L_i \to m_1 = \frac{d_{21}}{\varphi_{11}} = \frac{x}{2}\left(\frac{x^2}{l^2} - 1\right).$$

2. Soit à chercher l'allure des lignes d'influences des R, M et T dans une poutre continue sur 4 appuis. En appliquant le théorème de Land, on trouve l'allure des lignes d'influence suite :



5.2. La méthode des déplacements

5.2.1. Définitions ; on appelle :

- Noeud : un point de la structure où l'on choisi une ou plusieurs inconnues.

- Inconnues cinématiques : les inconnues de la méthode des déplacements ; ce sont les déplacements inconnus des noeuds de la structure étudiée.

- Structure cinématiquement déterminée : une str. dont les inconnues cinématiques sont toutes imposées nulles. La str est donc complètement bloquée du pt de vue du mvt de ses noeuds.

- Str. cinématiquement indéterminée : une structure ne répondant pas à la définition précédente i.e un certain nbre des noeuds peuvent subir des déplacem.

- Blocage simple : une liaison imposant en un noeud un déplacement nul dans une direction donnée.
Si un noeud a N degrés de liberté par exemple, un blocage simple supprime un degré, ramenant à N-1 les degrés de liberté du noeud.

- degré d'indetermination cinématique : un nombre représentant le total des blocages simples effectués sur une structure pour la ramener à une str. cinématiquement déterminée. Comme chaque blocage simple supprime un déplacement inconnu, ce degré

CHAP V. LES DEUX METHODES D'ETUDES DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES : METHODE DES DEPLACEMENTS & M. DES FORCES

5.1. Généralités

Dans ce chap. est exposé le principe de chacune de ces méthodes. La méthode des forces sera développée aux chap. VI, VII & VIII et celle des déplacements aux chap IX, X et XI. Rappelons - nous le principe de superposition vu en élasticité et en RDM !

Considérons une structure faite des matériaux élastiques et obéissant à la loi linéaire de Hooke, si les déformations de la structure sous l'effet des forces appliqués sont très petites et n'affectent pas l'action des forces (c'est la théorie du premier ordre).

L'effet produit par plusieurs forces agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des forces supposée ~~agissant~~ agit individuellement ⇒

On distingue deux catégories d'effets :

- les effets mécaniques ou statique (Réact. R, les élts de réduction M, N, T, M_t, les contraintes σ et τ) pour lequel le principe s'appelle "principe de supperposition des forces" ;
- les effets géométriques ou cinématiques (déplacement linéaire d, rotation φ, déformation ε et γ) pour lesquels le principe s'appelle "principe de supperposition de déplacements").

D'autre part, outre les forces P_i qui s'appliquent aux noeuds, la structure peut être chargée par des forces extérieures agissant entre les noeuds.

- <u>Application</u>

Dans le cas d'une structure plane formée des barres rectilignes, un noeud i.e une section quelconque possède trois d.d.l. (2 translations et une rotation) donc au sens général 3 déplacements possibles Δ_j. Pour les dites structures l'élément de base cinématiquement déterminé est une poutre bi-encastrée.
En effet ces deux noeuds extrêmes A et B sont complètement bloqués et s'ils subissent un dplcq déplacement connu (après déblocage), le déplacement et les efforts intérieurs de tous les pts peuvent être trouvés facilement.

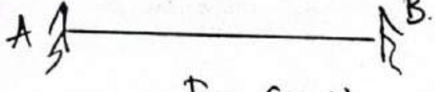


Fig (5.1)

D'une façon générale, la connaissance des déplacement en un certain nombre des noeud de la str. permet de trouver les déplacements et les efforts intérieurs en tout pt. de la structure

<u>L'objet de la méthode des déplacements est de déterminer ces m déplacements inconnus.</u>

Etant donné une str. on devra y choisir comme noeud le pt de rencontre de deux ou plusieurs barres et le pt d'appuis où les déplacements sont possibles.

D'autre part, outre les forces P_i qui s'appliquent aux noeuds, la structure peut être chargée par des forces extérieures agissant entre les noeuds.

- Application

Dans le cas d'une structure plane formée des barres rectilignes, un noeud i.e une section quelconque possède trois d.d.l. (2 translations et une rotation) donc au sens général 3 déplacements possibles d_j. Pour les dites structures l'élément de base cinématiquement déterminé est une poutre bi-encastrée en effet ces deux noeuds extrêmes A et B sont complètement bloqués et s'ils subissent un ftq déplaceo connu (après déblocage), le déplacement et les efforts intérieurs de tous les pts peuvent être trouvés facilement.

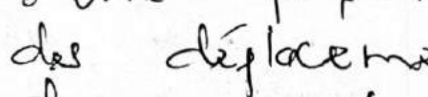


Fig (5.1)

D'une façon générale, la connaissance des déplacement en un certain nombre des noeud de la str. permet de trouver les déplacements et les efforts intérieurs en tout pt. de la structure

L'objet de la méthode des déplacement est de déterminer ces m déplacements inconnus.

Etant donné une str. on devra y choisir comme noeud le pt de rencontre de deux ou plusieurs barres et le pt d'appuis où les déplacements sont possibles

5.2.2 coefficients k_{ij} et k_{ip}

Par déf, on appelle coeff. de rigidité et on note k_{ij} la réaction produite à l'endroit du blocage i dans la direction i par un déplacement (rx'el). unité $\Delta_j = 1$;

Par conséquent, on peut calculer k_{ij} par le théorème de déplacement unité. Pour une structure élastique linéaire plane formée des barres, l'équation (2.15) s'écrit :

$$\boxed{k_{ij} = \int_0^s EI \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_i \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_j ds + \int_0^s EA \left(\frac{du}{ds}\right)_i \left(\frac{du}{ds}\right)_j ds + \int_0^s GA^* \left(\frac{dv}{ds}\right)_i \left(\frac{dv}{ds}\right)_j ds} \qquad (5.1)$$

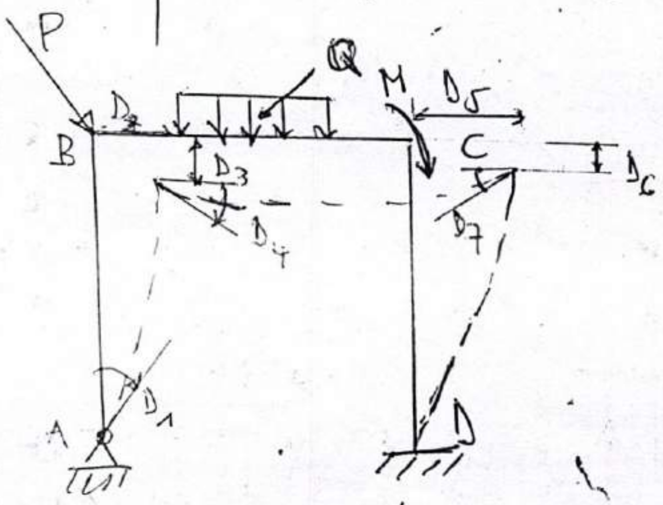
où $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_i$; $\left(\frac{du}{ds}\right)_i$; $\left(\frac{dv}{ds}\right)_i$ représentent les déformations courantes virtuelles dues à $\Delta_i = 1$

et $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_j$ $\left(\frac{du}{ds}\right)_j$; $\left(\frac{dv}{ds}\right)_j$; représente les déformations courantes réelles dues à $\Delta_j = 1$ (Déplacement imposé.)

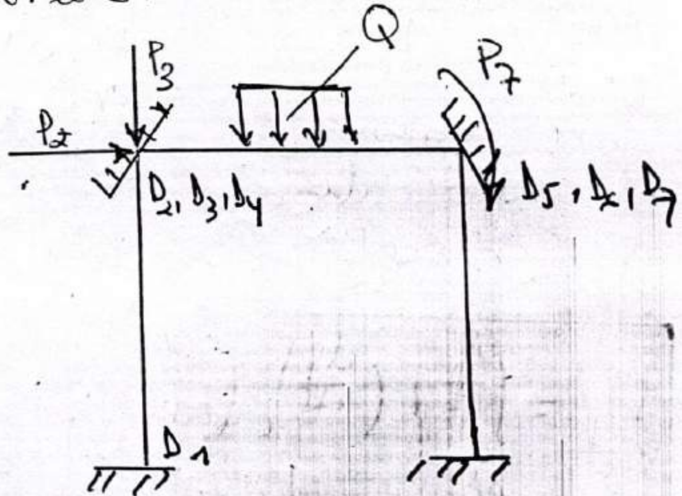
Les coeff. de rigidité jouissent de la propriété suivante qui résulte du théorème de réciprocité de Betty - Maxwell ; $k_{ij} = k_{ji}$. (5.2b)

On définit de la même manière et on note k_{ip} le coeff. représentant la réaction produite à l'endroit du blocage i

Cependant, on pourra aussi choisir comme noeud un point quelconque sur une barre q/q (méthode des éléments finis). On effectuera en chacun de ces noeuds tous les blocages simples successifs nécessaires à transformer la structure donnée en une str. cinématiquement déterminée.



a) structure donnée + déformée



b) structure S_0

Noeud	# de degré L = # blocage simple	Inconnues
A	1	D_1 = rot, D_2 et D_5 = translation horizontale
B + C	3 + 3	D_3 et D_6 = translation verticale D_4 et D_7 : rotation

$m = 7$.

ds la str. bloquée C_0 on considère les forces agissant à l'endroit du blocage simple i (ds la direction i) d'un certain noeud ds la direction i.

Ces forces sont :

- Les rxs produites par chaque déplacement cherché D_j qui valent $k_{ij} D_j$ en vertu de la définition de k_{ij}
- La rx due aux forces extérieures entre noeuds k_{ip}.

En vertu du principe de superposition des forces, la rx totale en i ds la direction i vaut

$$\boxed{k_{ij} D_j + k_{ip} = k_{i1} D_1 + k_{i2} D_2 + k_{i3} D_3 + \dots + k_{ii} D_i + k_{im} D_m + k_{ip}}$$

or le noeud considéré doit être en équilibre. En exprimant ce fait selon la direction i, la rx totale précédente doit faire équilibre à la force extérieure concentrée P_i agissant directement sur ce noeud ds la m. direction i. On a donc pour les blocages simples i des noeuds, $i = 1 \dots n$

$$k_{ij} D_j + k_{ip} = P_i \quad (j = 1, 2, \dots, m \text{ et } i = 1, 2, \dots, n) \qquad (5.4)$$

L'équation (5.4) représente un système de m équations linéaires aux m inconnues D_j.

dans la direction i, par les forces extérieures entre noeud.

Par conséquent on peut calculer k_{ip} par le th. de déplacement unité. Pour les structures élastiques linéaires planes formées des barres, on a :

$$k_{ip} = \int_0^s EI \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_i \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_p ds + \int_0^s EA \left(\frac{du}{ds}\right)_i \left(\frac{du}{ds}\right)_p ds + \int_0^s GA^* \left(\frac{dv}{ds}\right)_i \left(\frac{dv}{ds}\right)_p ds \qquad (5.3)$$

où $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_i$; $\left(\frac{du}{ds}\right)_i$, $\left(\frac{dv}{ds}\right)_i$ représentent de nouveau les déformations courantes virtuelles dues à $D_i = 1$; et

$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_p$, $\left(\frac{du}{ds}\right)_p$, $\left(\frac{dv}{ds}\right)_p$ représentent les déformations courantes réelles dues à P ~~$D_j = 1$~~ entre noeuds

Rmq : lorsqu'on applique la méthode de déplacement les coeff. k_{ij} et k_{ip} se calculent de la structure cinématiquement déterminée de référence C_0.

5.2.3. Equations générales de la méth. des déplacements

Considérons une structure, et soient C_0 la str. cin. de réf. qui lui ~~est~~ associée et D_j avec $j = 1, \ldots, m$ les m inconnues cinématiques.

5.3. Méthode des forces

5.3.1. Définitions

On appelle :

- Inconnue hyperstatique : les inconnues de la méthode des forces. Ce sont les forces intérieures inconnues en certains noeuds de la str. étudiée
- Structure statiquement déterminée ou Isostatique : une structure où les forces intérieures peuvent être toutes déterminée à partir des seules équations d'équilibre. C'est aussi une structure dont les inconnues hyperstatiques sont toutes imposées nulles.
- Str. statiquement indéterminée ou hyperstatique : une str. ne répondant pas à la déf. précédente. ainsi les éq. d'équilibre sont insuffisantes pour trouver toutes les forces intérieures.
- Coupure simple, la suppression d'une liaison qui imposant à un noeud une force intérieure inconnue dans une direction donnée.
  Si en un noeud existe par ex. N inconnues hyperstatiques une coupure simple fait disparaître une inconnue hyperstatique, ramenant à N-1 le nbre des forces inconnues en ce noeud.
- Degré d'indétermination statique ou

5.3. Méthode des forces

5.3.1. Définitions

On appelle :

- Inconnue hyperstatique : les inconnues de la méthode des forces. Ce sont les forces intérieures inconnues en certains noeuds de la str. étudiée

- Structure statiquement déterminée ou isostatique : une structure où les forces intérieures peuvent être toutes déterminées à partir des seules équations d'équilibre. C'est aussi une structure dont les inconnues hyperstatiques sont toutes imposées nulles.

- Str. statiquement indéterminée ou hyperstatique : une str. ne répondant pas à la déf. précédente. ainsi les éq. d'équilibre sont insuffisantes pour trouver toutes les forces intérieures.

- Coupure simple, la suppression d'une liaison qui imposant à un noeud une force intérieure inconnue dans une direction donnée.

Si en un noeud existe par ex. N inconnues hyperstatiques une coupure simple fait disparaître une inconnue hyperstatique, ramenant à N-1 le nbre des forces inconnues en ce noeud.

- Degré d'indétermination statique ou

(M, N, T) i.e au sens général 3 forces internes inconnues X_i. Le nbre d'inconnues introduit par un appui dépend du type d'un appui fig (5.3).

- un appui à chariot (appui sur chariot ou appui mobile, introduit une inconnue. voir fig (a).)

- un appui à rotule (ou appui fixe ou une articulation) introduit 2 inconnues voir fig b.
- un encastrement introduit 3 inconnues voir fig c.

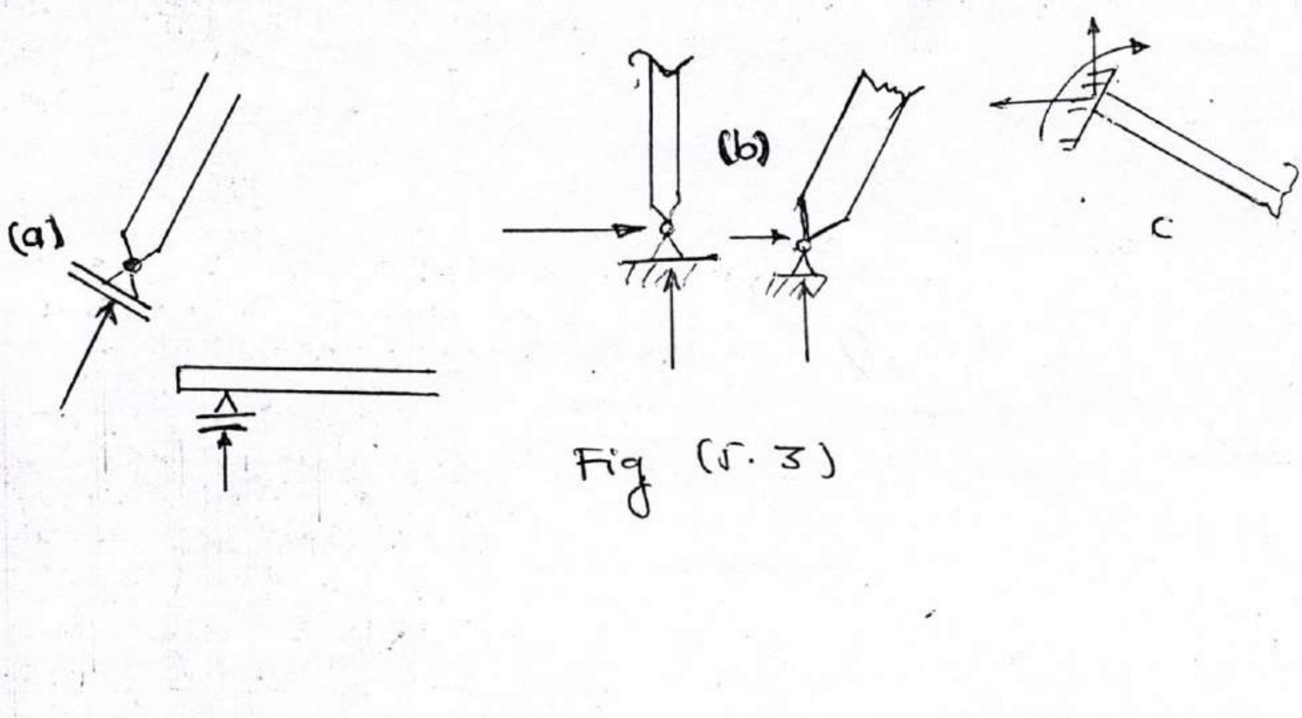


Fig (5.3)

(M, N, T) i.e au sens général 3 forces internes inconnues X_i. Le nbre d'inconnues introduit par un appui dépend du type d'un appui fig (5.3).

- un appui à chariot (appui sur chariot ou appui mobile, introduit une inconnue. voir fig (a).)

- un appui à rotule (ou appui fixe ou une articulation) introduit 2 inconnues voir fig b.
- un encastrement introduit 3 inconnues voir fig c.

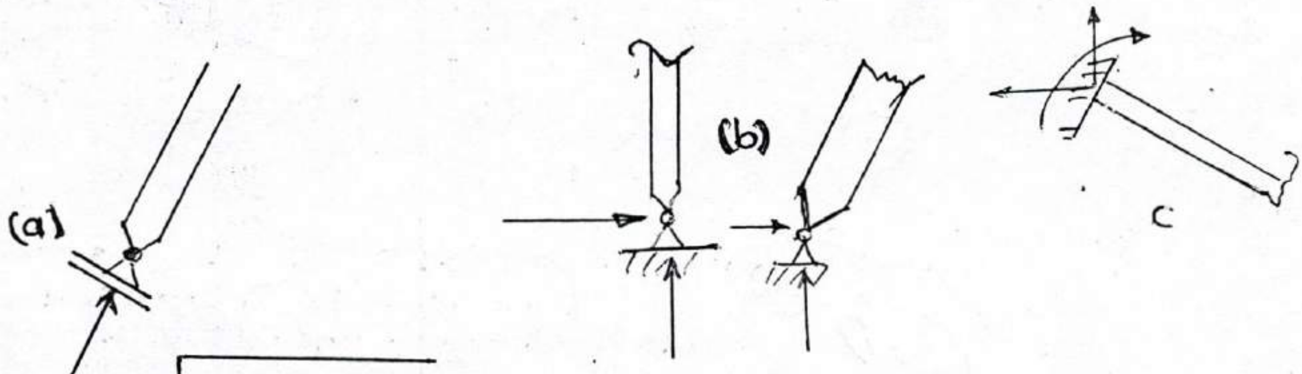
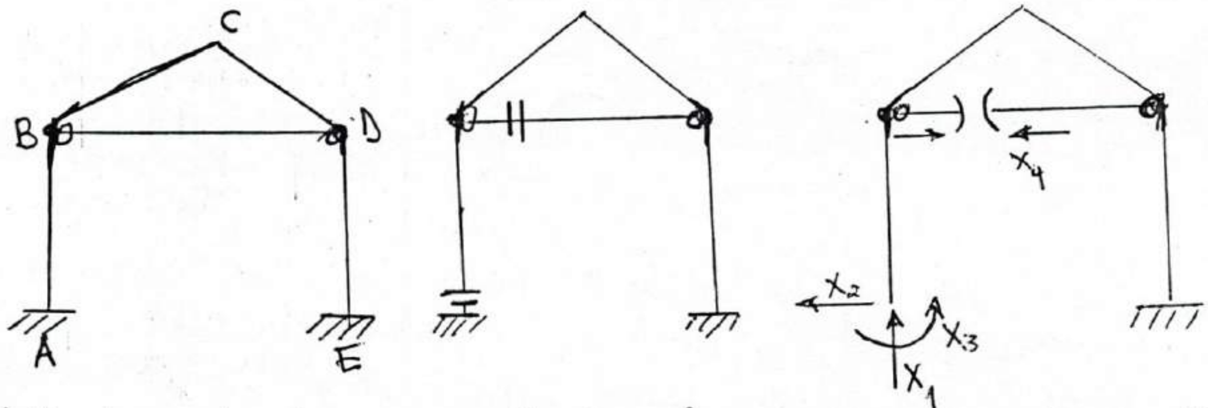


Fig (5.3)

- Exemples

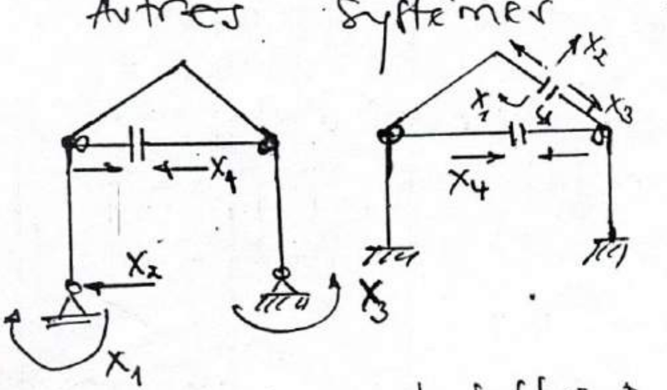
a. Cadre encastré avec tirant fig (5.4.a).



a) Structure donnée b) Structure S_0 c) Extériorisation des inconnues.

Degré d'hyperstaticité	Choix des coupures	Inconnues X_j et leur définit°
$n_e = 3$	3 coupures simples en A (= 1 coupure triple ou totale en A)	X_1 = effort normal (rx verticale). X_2 = " tranchant (rx. horiz) X_3 = moment fléchissant
$n_i = 1$	1 coupure simple intérieure dans le tirant	X_4 = effort normal dans le tirant
Total $n = 3+1 = 4$ degré d'indétermination statique		

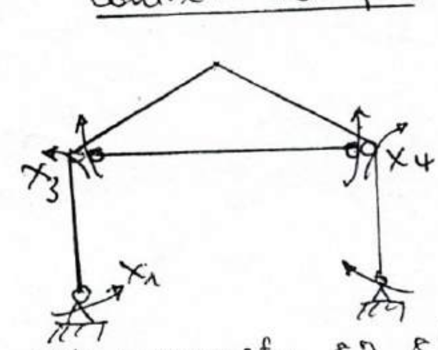
Autres systèmes S_0, fig (5.5)



a. S_0 (type poutre ... à 2 appuis simples)

b. S_0 (type 2 consoles)

Contre-exemple



S_0 est incorrect, en effet la partie centrale reste hyperstatique commentaires sur les coupures. cas b.

1) suppression des liaisons extérieures en A, B, C ($n_e = 7$) par des coupures triples A, E et F et des coupures doubles en B et C d'où $n = 13$, fig (5.7, b)

2. <u>cas C</u>, suppression de 13 liaisons internes relatives au moment de flexion par 13 coupures simples. $n = n_i = 13$.

5.3.2. Coefficients f_{ij} et f_{ip}

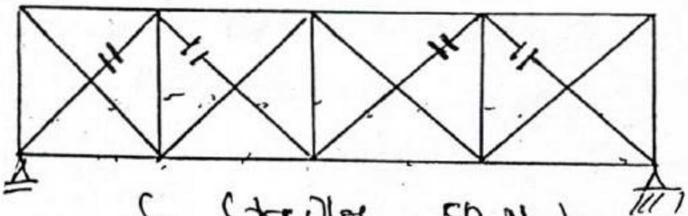
par déf. on appelle coefficient de flexibilité et on note f_{ij} le déplacement relatif des lèvres de la coupure i dans la direction i dû à une force unité (réelle) $X_j = 1$ agissant sur la coupure j dans la direction j

On peut calculer ce déplacement par le th. de la force unité. Pour une str. élastique linéaire plane formée des barres, l'équation (2.30) s'écrit ici :

$$\boxed{f_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int_0^l \frac{T_i T_j}{GA^*} ds} \qquad (5.7)$$

où M_i, N_i et T_i sont des éléments de réduct° courants virtuels dus à la sollicitation virtuelle $X_i = 1$ et M_j, N_j et T_j sont des éléments de réduction courant réels dus à la sollicitation réelle $X_j = 1$.

$f_{ij} = f_{ji}$ (formule de Maxwell) 5.8



S_0 (treillis en N) Fig (5.8)

e) Cas de systèmes et sollicitations extérieurs symétriques ou antisymétriques par rapport à un ou plusieurs axes.

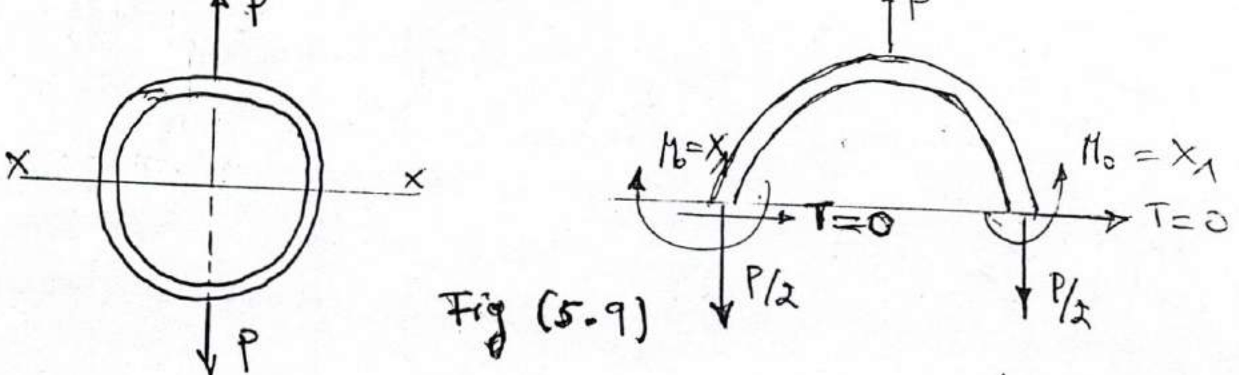


Fig (5.9)

Le degré d'hyperstaticité peut se retrouver réduit.

La structure S_0 peut ensuite être sollicitée par la charge extérieure plus les inconnues hyperstatiques X_j et les déplacements relatifs des coupures simples sont déterminés. En exprimant que dans chaque coupure simple le déplacement relatif réel des lèvres doit être nul, on détermine les X_i dont la connaissance permet de trouver les efforts internes et déplacements en tout points de la structure.

L'équation (5.10) représente un syst. de n équations linéaires où n inconnues X_j, ces éq. sont les équations générales de la méthode des forces. Elles représentent les équations de compatibilité des déplacements relatives aux n coupures simples i.

On appelle matrice de flexibilité de la structure et on note $[F]$ le tableau des coeff. f_{ij} des inconnues de la méthode de forces. Cette matrice est carrée $[n \times n]$ et symétrique (voir 5.8).
Si l'on désigne $\{X\}$ le vecteur colone représentant les inconnues et par la matrice $\{A\}$ celui représentant les 2nd membres ou termes indépendants $-f_{if}$, l'équation (5.10) peut s'écrire matriciellement :

$$[F]\{X\} = \{A\} \qquad (5.11).$$

La solution de ce syst. peut s'obtenir par l'inversion de $[F]$:

$$\{X\} = [F]^{-1}\{A\}.$$

Cette procédure matricielle est employée dans la formulation de la méthode de force en vu de son application sur ordinateur.

L'équation (5.10) représente un syst. de n équations linéaires à n inconnues X_j, ces éq. sont les équations générales de la méthode des forces. Elles représentent les équations de compatibilité des déplacements relatives aux n coupures simples i.

On appelle matrice de flexibilité de la structure et on note [F] le tableau des coeff. f_{ij} des inconnues de la méthode des forces. Cette matrice est carrée [n×n] et symétrique (voir 5.8).
Si l'on désigne {X} le vecteur colonne représentant les inconnues et par la matrice {A} celui représentant les 2nd membres ou termes indépendants $-f_{ip}$, l'équation (5.10) peut s'écrire matriciellement :

$$[F]\{X\} = \{A\} \qquad (5.11)$$

La solution de ce syst. peut s'obtenir par l'inversion de [F] :

$$\{X\} = [F]^{-1}\{A\}$$

Cette procédure matricielle est employée dans la formulation de la méthode de force en vu de son application sur ordinateur.

$$f_{ij} = f_{ji} = \frac{\Sigma N_i N_j l}{EA}$$

$$f_{ip} = \Sigma \frac{N_i N_p l}{EA} \qquad (6.1)$$

6.2. Calcul des termes indépendants de (5.10) : Cas d'une variation de t°, d'un retrait, d'un mvt d'appui, etc... dans une structure hyperstatique

Désignons par $f_{1,T}$, f_{2T} ... f_{nT} les déplacements relatifs des lèvres des coupures 1 à n du système isostatique de référence soumis à une variation de température qui représente ici la sollicitation extérieure. $f_{i,T}$ remplace $f_{i,p}$ dans (5.10). De même si f_{1R}, f_{2R} ... f_{nR} définissent l'effet de retrait aux coupures n° 1 jusqu'au n° n du système S_o, on écrira (5.10) où f_{ip} sera remplacé par f_{iR}.

Comme on assimile toujours l'effet de retrait à une variation de température (voir le cours de béton armé), les f_{iT} et f_{iR} peuvent se calculer par (2.33)

$$\boxed{f_{iT} = \int_0^s N_i\, \alpha T\, ds + \int_0^s M_i \frac{\alpha \Delta T}{h}\, ds} \qquad (6.2)$$

Pour une structure élastique linéaire plane formée des barres : X

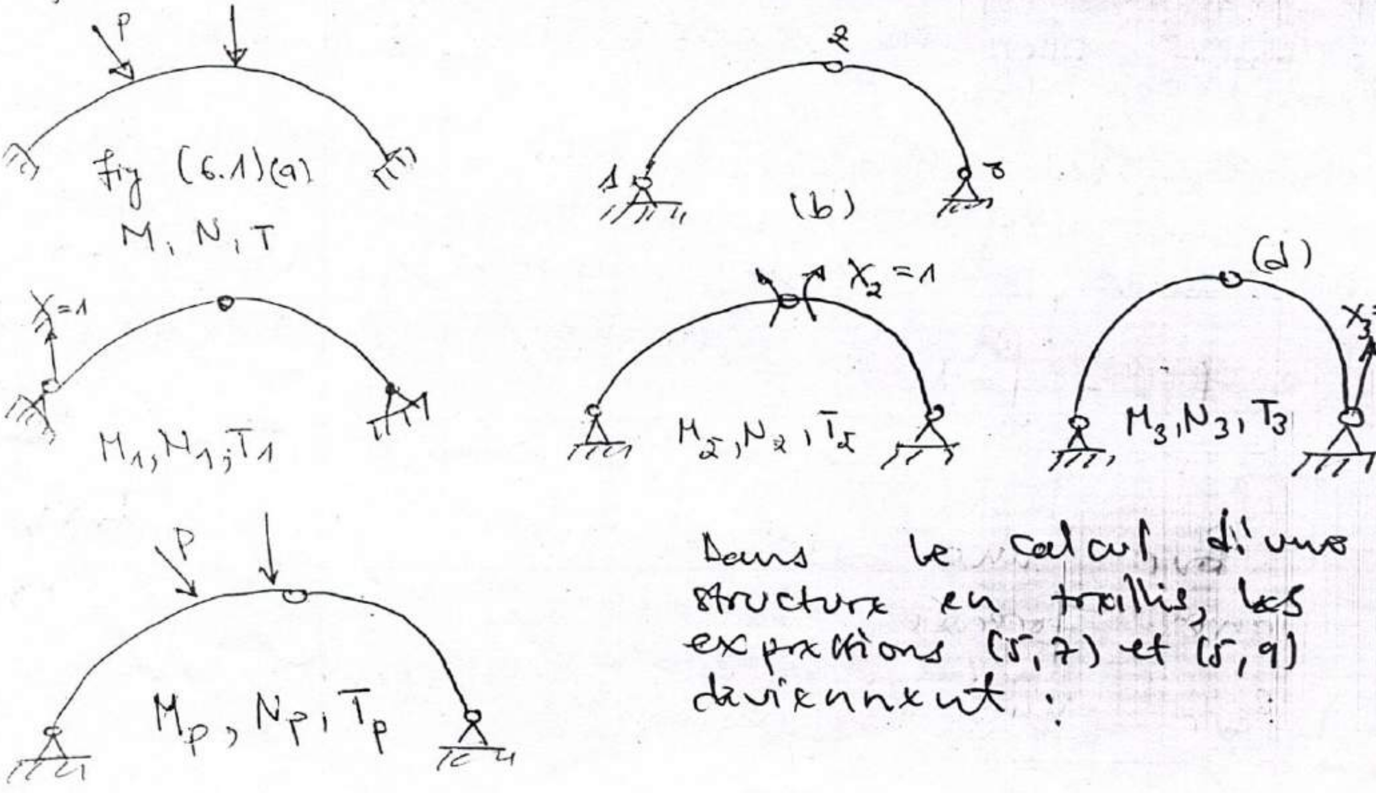
Pour un treillis, on aura :

$$\boxed{f_{iT} = \Sigma N_i\, \alpha T\, l_i} \qquad (6.3)$$

CHAP VI. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES FORCES ET SES APPLICATIONS ELEMENTAIRES

6.1. Quelques considérations additionnelles sur le calcul des coefficients f_{ij} et f_{ip}

Si l'on veut par exemple étudier (calculer) un arc biencastré (voir fig 6.1.a) on peut adopter un système isostatique de référence. L'arc à 3 de la figure 6.1b Les diagrammes M_1, M_2, M_3 sont alors les diagrammes des moments obtenus en appliquant successivement un moment, une paire de moment puis un moment unitaire aux lèvres de la coupure 1, 2 et 3 respectivement (voir fig 6.1.d). Le diagramme M_p est celui obtenu dans le système S_0 chargé des forces extérieures (voir fig 6.1.c). Il en sera de même pour N_1, N_2 et N_3, T_1, T_2 et T_3, N_p et T_p.



Dans le calcul d'une structure en treillis, les expressions (5,7) et (5,9) deviennent :

VI.3 . Détermination numérique des f_{ij} et f_{ip} en pratique

VI.3.1. Hypothèses simplificatrices (Rappel)

En pratique dans les poutres essentiellement fléchies, on néglige toujours les déformations dues à T et à N sauf dans les structures spéciales comme : Treillis, les tirants, les suspentes ou il ne faut évidemment pas négliger l'effet N. Dans le cas courant :

$$f_{ij} = \int_0^s \frac{M_i M_j}{EI} ds \; ; \quad f_{ip} = \int_0^s \frac{M_i M_p}{EI} ds \qquad (6.4)$$

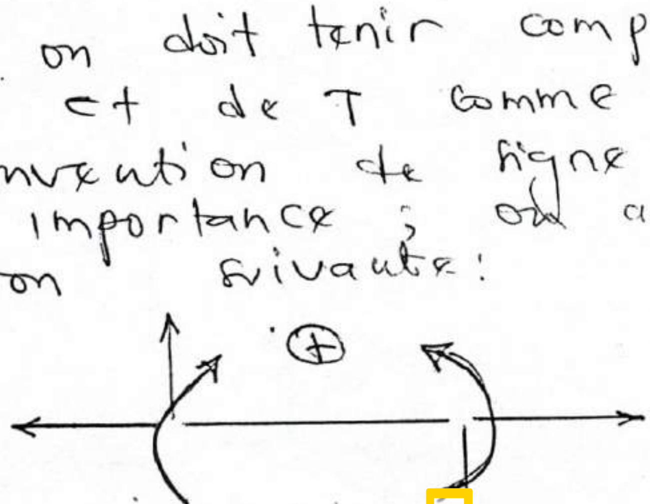
! (voir abaques $\int_0^L M m \, dx$)

VI.3.2. Convention des signes

Les intégrales (6.4) sont indépendantes de la convention des signes des M adoptée. En effet si on inverse le signe ; les M de (6.4) intervenant dans le produit changent simultanément le signe. (Le résultat ne change pas)

Rmq : a) $\int_0^s \frac{M_i^2 \, ds}{EI}$ sont donc positives

b) Si on doit tenir compte de l'effet de N et de T comme pour M, la convention de signe n'a pas d'importance ; on appliquera la convention suivante :



VI.3. Détermination numérique des f_{ij} et f_{ip} en pratique

VI.3.1. Hypothèses simplificatrices (Rappel)

En pratique dans les poutres essentiellement fléchies, on néglige toujours les déformations dues à T et à N sauf dans les structures spéciales comme : Treillis, les tirants, les suspentes ou il ne faut évidemment pas négliger l'effet N. Dans le cas courant :

$$f_{ij} = \int_0^s \frac{M_i M_j}{EI} ds \; ; \quad f_{ip} = \int_0^s \frac{M_i M_p}{EI} ds \qquad (6.4)$$

! (voir abaques $\int_0^L Mm\,dx$)

VI.3.2. Convention des signes

Les intégrales (6.4) sont indépendantes de la convention des signes des M adoptée. En effet si on inverse le signe ; les M des (6.4) intervenant dans le produit changent simultanément le signe. (Le résultat ne change pas)

Rmq : a) $\int_0^s \frac{M_i^2 ds}{EI}$ sont donc positives

b) Si on doit tenir compte de l'effet de N et de T comme pour M, la convention de signe n'a pas d'importance ; on appliquera la convention suivante :

et $\int_0^l x\, f(x)\, dx = \Omega\, x_0$ - (moment statique de Ω par rapport à M)

$$\Rightarrow \quad I = A\,\Omega\, x_0 + B\,\Omega$$

$$= \Omega\,(\underbrace{A x_0 + B}_{= \eta_0})$$

$$\Rightarrow \quad I = \Omega\, \eta_0$$

6.3.5. Cas où les I sont variables

On calculera les intégrales (6.4) de façon approchée au moyen d'une méthode d'intégration numérique. par exemple par la formule de Simpson. En première approximation on posera :

$$I = \int_0^l \frac{M_{i(s)}\, M_{j(s)}}{EI_{(s)}}\, ds \cong \sum \frac{M_i\, M_j}{EI}\, \Delta S$$

formule des rectangles. La somme s'étendant à un nombre ~~suffisamment~~ des tronçons ΔS de longueur finie. et en ayant bien soin de prendre comme point de division des tronçons de longueurs ΔS tous les points où M_i, M_j et I changent brusquement.

6.3.6. Cas de certaines barres courbes

(voir cours de ponts spéciaux pont boustring, 5è SOA).

Dans certains cas des barres courbes le moment d'inertie de la barre $I_{(s)}$ ~~est~~ tel que ; x étant un ~~certain~~ certain axe rectiligne :

6.3.3. Cas où les moments d'inertie sont constants par tronçon

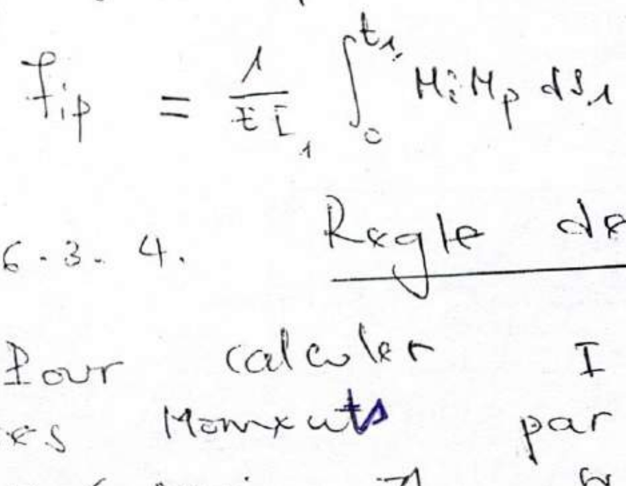
Si on appelle t_1, t_2, ... les longueurs des différents tronçons composant le système ; on peut écrire :

$$f_{ij} = \frac{1}{EI_1}\int_0^{t_1} M_i M_j \, ds_1 + \frac{1}{EI_2}\int_0^{t_2} M_i M_j \, ds_2 + \dots$$

$$f_{ip} = \frac{1}{EI_1}\int_0^{t_1} M_i M_p \, ds_1 + \dots$$

6.3.4. Règle de VERECHAGUINE

Pour calculer $I = \int_0^l M_i M_j \, dx$ où l'un des moments par exemple M_j ~~est~~ linéaire il suffit de multiplier l'aire du premier diagramme (M_i) par l'ordonnée du second (M_j) mesurée au droit du centre de gravité du premier voir fig (6.3)



$$\boxed{I = \Omega \cdot \eta_0}$$

Fig (6.3)

<u>Démonstration</u>

$$I = \int_0^l f(x)\,(Ax+B)\,dx = A\int_0^l x\, f(x)\,dx + B\int_0^l f(x)\,dx$$

or $\int_0^l f(x)\,dx = \Omega$ (aire).

tiques

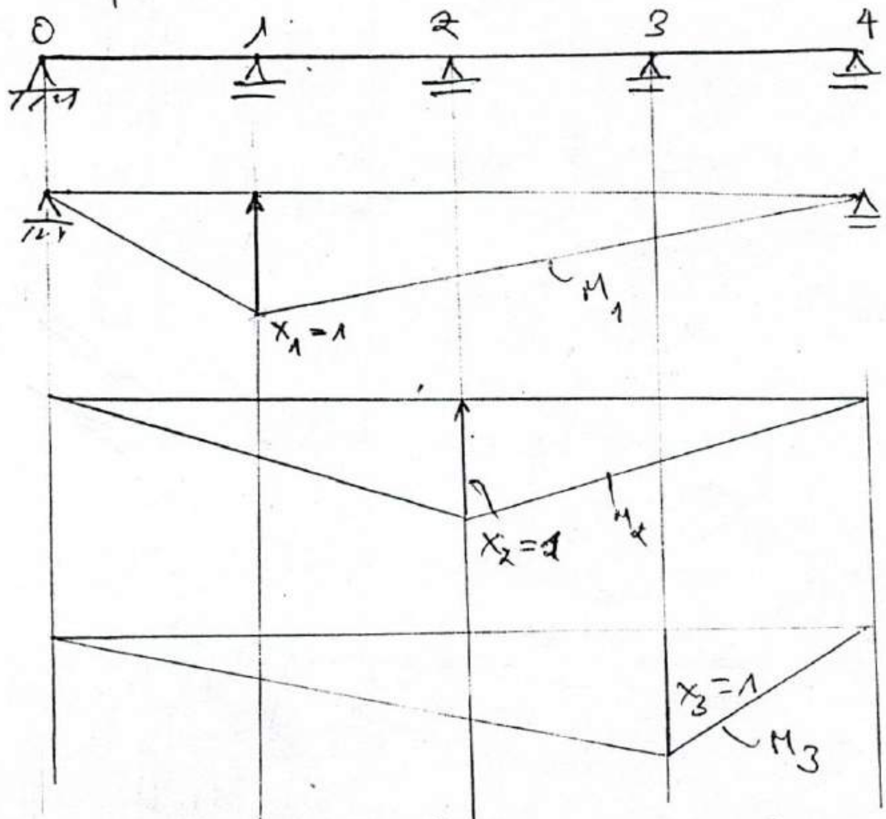


Fig (6.5)

Fig (6.6).

Les diagrammes des moment à considérer sont alors à la figure (6.6).
L'inspection de ces diagrammes montre immédiatement que tous les (éléments) coefficients $f_{ij} = \int_0^s M_i M_j \frac{ds}{EI}$ sont différents de zéro et que leur calcul sera assez long parce que le diagramme des M s'étendent sur toute la longueur de la poutre. Si au contraire on adopte comme Clapeyron en RDM comme inconnues ~~hyperstatiques~~ les moments aux appuis (voir fig 6.7) chacun des efforts $X_i = 1$ donne lieu à un diagramme de M limité aux deux travées adjacentes à l'appuis considéré. Ainsi, la ième équation de

Figure :

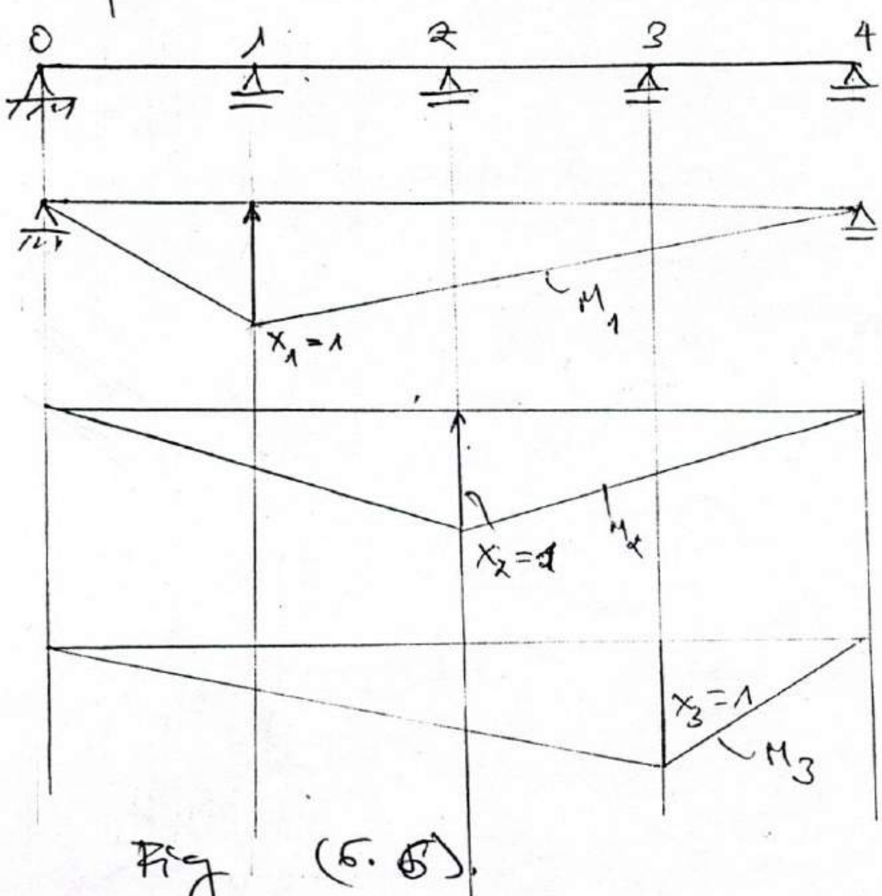


Fig (6.5)

Fig (6.6).

Les diagrammes des moment à considérer sont alors à la figure (6.6).
L'inspection de ces diagrammes montre immédiatement que tous les (éléments) coefficients $f_{ij} = \int_0^s M_i M_j \frac{ds}{EI}$ sont différents de zéro et que leur calcul sera assez long parceque le diagramme des M s'étendent sur toute la longueur de la poutre. Si au contraire on adopte comme Clapeyron en RDM comme inconnues hyperstatiques les moments aux appuis (voir Fig 6.7) chacun des efforts $X_i = 1$ donne lieu à un diagramme des M limité aux deux travées adjacentes à l'appuis considéré. Ainsi, la ième équation de

Hugues Kumeso

$$I(s) \cdot \cos\varphi(s) = I(s)\frac{dx}{ds} = J = \text{constante}$$

(·) $I(s) \quad \cos 0° = J = \text{cte}$

$I(s) \quad \cos\varphi = J \Rightarrow I(s) = \dfrac{J}{\cos\varphi} >$

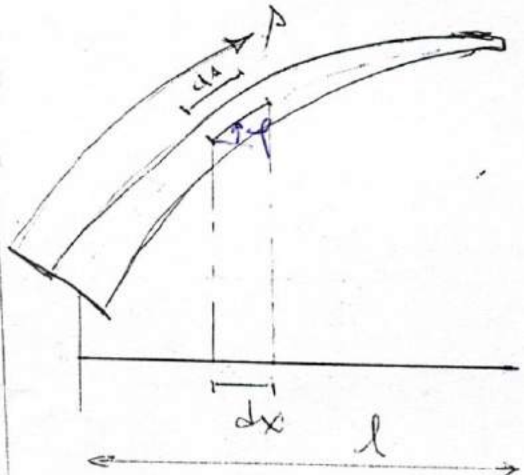


fig (6.4)

$$f_{ij} = \int_0^s \frac{M_i M_j}{E I(s)} ds \cancel{\frac{dx}{dx}}$$

avec $I(s) = \dfrac{J\,ds}{dx}$

$$\Rightarrow f_{ij} = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_i M_j \, dx$$

J est appelé moment d'inertie réduit.
Dans ces conditions :

$$f_{ij} = \int_0^s \frac{M_i M_j}{E I(s)} ds \frac{dx}{dx} = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_i M_j \, dx$$

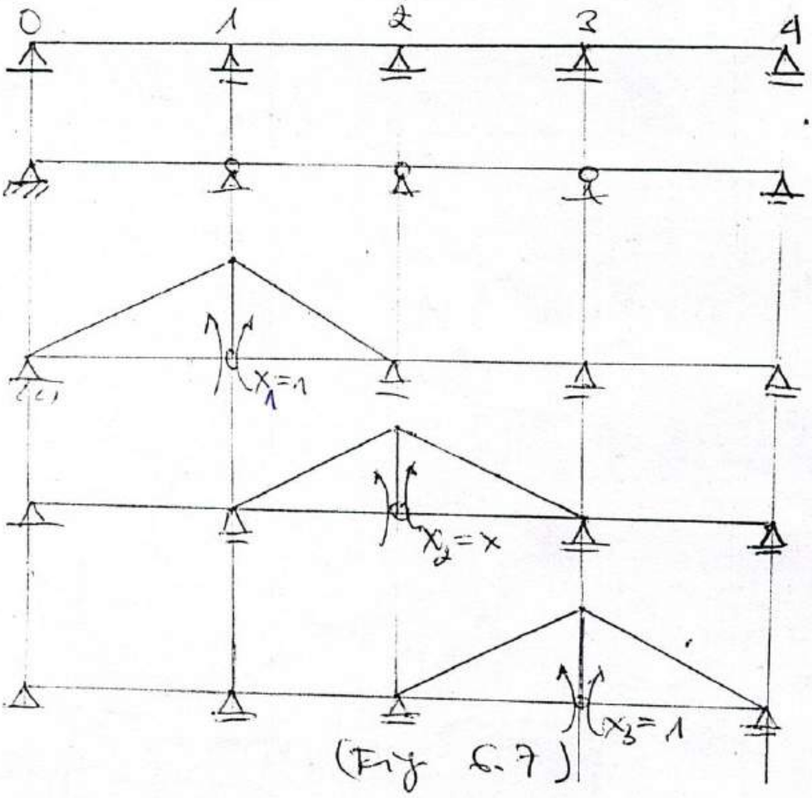
de sorte que l'intégrale se fera le long de l'axe x plutôt que s.

6.4. Applications élémentaires

6.4.1. Poutres continues sur appuis fixes

1. Raison du choix des moments sur appuis comme inconnues hyperstatiques.

Admettons qu'on ait pris des réactions des appuis intermédiaires par exemple celle de la poutre sur ang appuis (fig 6.5) comme inconnue hypersta-



(Fig 6.7)

Compatibilité est donc :

$$\boxed{f_{i,i-1}X_{i-1}+f_{i,i}X_i+f_{i,i+1}X_{i+1}=-f_{ip}} \quad (6.5)$$

2. Dénivellations d'appuis

Lorsque dans une poutre continue, l'appui i subit une dénivellation V_i positif vers le bas, les deux travées aboutissant à A_i (fig 6.8)

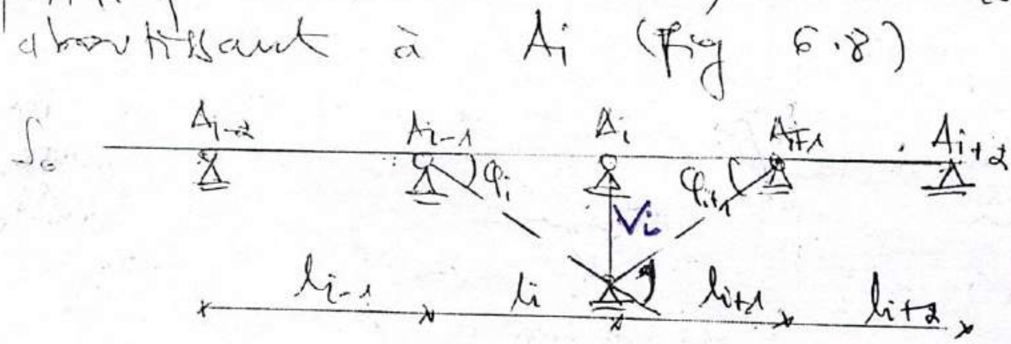


fig (6.8)

subissent de ce fait dans la structure S_0 les déviations suivantes :

$$|\varphi_i| = \left|\frac{V_i}{l_i}\right|$$

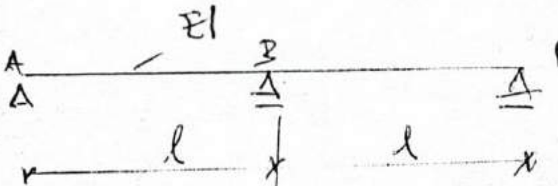
$$|\varphi_{i+1}| = \left|\frac{V_i}{l_{i+1}}\right|$$

dans le système isostatique de référence, les lèvres des coupures $i-1$, i et $i+1$ subissent respectivement les rotations (déviations) suivantes

$$\frac{V_i}{l_i} \;;\; -\frac{V_i}{l_i} - \frac{V_i}{l_{i+1}} \text{ et } \frac{V_i}{l_{i+1}} \qquad (!)$$

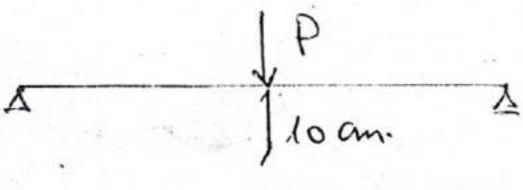
| calcul des poutres continues avec un appui qui tasse. (examen)

ex :



$\downarrow$ 10 cm (tasse de 10 cm)

on considère une force P, on a :



$$f = \frac{kP}{EI} = 10 \text{ cm}.$$

$\Rightarrow$ P et on trace le diagramme de M et T.

Ces quantités déterminées géométriquement sont précisément les termes indépendants f_{iA}, f_{i+1A}, f_{i-1A} des équations de compatibilité.

Quant aux signes, $f_{j,A}$ est positif s'il a le même sens que X_j positif et est négatif si c'est le contraire.

13. Ligne d'influence des moments sur appuis

La Li de X_i/A_i s'obtient directement par le th. de LAND : « c'est la déformée de la poutre continue (~~un appui à la ...~~) articulée seulement sur ~~ces~~ l'appui considéré et dont les lèvres de la coupure sont sollicitées par une paire des moments $-X_i$ »

On sait par le paragraphe 4.4. que l'ordonnée courante de la ligne d'influence ~~est~~ donnée par :

$$m = -\frac{d_{21}}{\varphi_{11}}$$

. Pour éviter d'être embarrassé par l'échelle φ_{11} $\varphi_{11} (= \varphi_{ii})$; on peut choisir des inconnues hyperstatique de façon à avoir $\varphi_{ii} = 1$ compte tenu de la procédure de l'obtention de l'allure (avec signe) des Li on a tout simplement $m = d_{21}$. Or le 1er membre de l'éq. de compatibilité (6.5) représente par définition; la rotation relative des 2 lèvres de la coupure i dues aux inc. hyperstatique, appliquées au syst. S_i. Nous devons donc poser:

$$\boxed{f_{i,i-1} X_{i-1} + f_{i,i} X_i + f_{i,i+1} X_{i+1} = 1} \quad (6.7)$$

pour réaliser la continuité angulaire de la poutre sur tous les autres appuis $k \neq i$; il faut:

$$\boxed{f_{k,k-1} X_{k-1} + f_{k,k} X_k + f_{k,k+1} X_{k+1} = 0} \quad (k \neq i) \quad (6.8)$$

X_i : moment qui se crée au niveau des appuis, pour qu'à un appui soit $\varphi_{ii} = 1$.

Les éq. (6.7) et (6.8) permettent de calculer X_i sur tous les appuis intermédiaires.

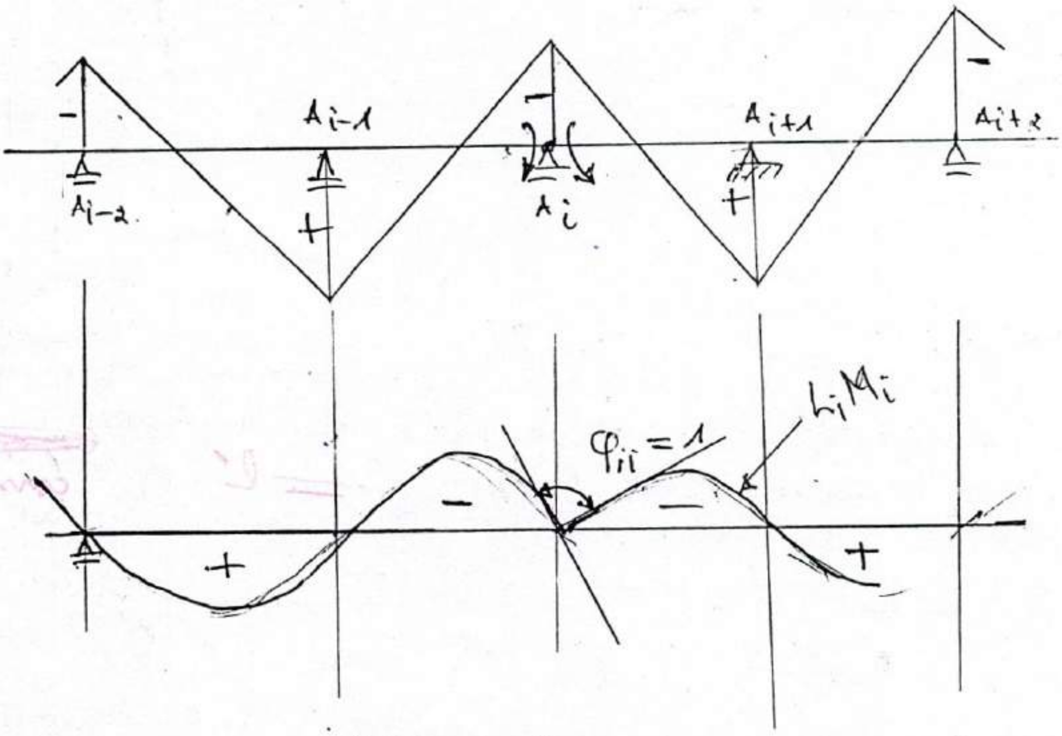
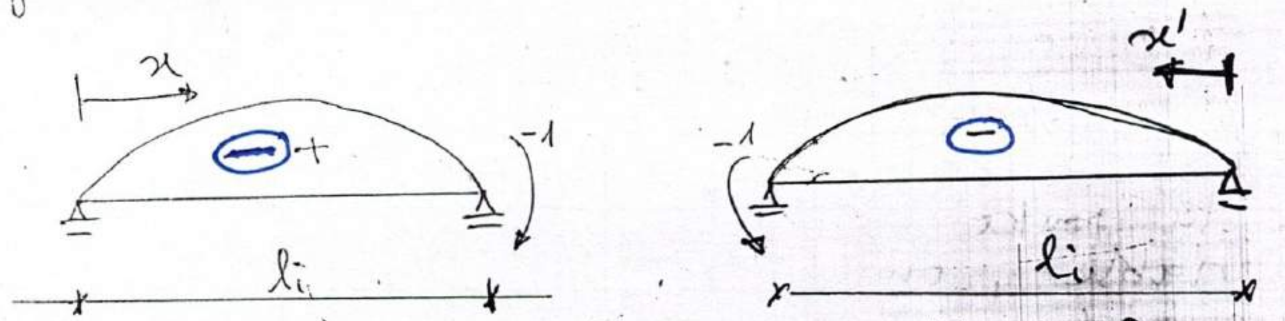


Fig (6.9)

On obtient ainsi le diagramme des moments de la figure 6.9 et la déformée correspondante est la ligne d'influence cherchée. Elle se compose de l'ensemble des déformées des diverses travées soumises à X.

Dans le cas où le moment d'inertie reste constant dans une travée, nous pouvons obtenir par la déformée η_i de la travée $i-1$ en combinant ~~linéai~~ linéairement les déformées connues (voir Fig 6.10).

où
$$\eta_d = \frac{l_i^2}{6EI_i}\left(\frac{x^3}{l_i^3} - \frac{x}{l_i}\right)$$
$$\eta_g = \frac{l_i^2}{6EI_i}\left(\frac{x'^3}{l_i^3} - \frac{x'}{l_i}\right)$$



$$\eta_d = \frac{l_i^2}{6EI_i}\left(\frac{x^3}{l_i^3} - \frac{x}{l_i}\right) \qquad \eta_g = \frac{l_i^2}{6EI_i}\left(\frac{x'^3}{l_i^3} - \frac{x'}{l_i}\right)$$

Fig (6.10)

~~Dans le cas où le moment d'inertie~~

D'une poutre prismatique soumise à un couple unitaire négatif à droite et à gauche respectivement.

$$\boxed{\eta_i = X_{i-1}\,\eta_g + X_i\,\eta_d} \qquad (6.9)$$

pour les tronçons $i-2$, $i-1$ on aura

$$\eta_{i-1} = X_{i-2}\,\eta_g + X_{i-1}\,\eta_d \,, \quad \text{et etc.}$$

Les h_i des moments fléchissant des poutres continues à moment d'inertie constant par travée sont des combili des paraboles cubiques de la forme :

avec $\xi = \frac{x}{l}$ ou $\frac{x'}{l}$ selon le cas :

$\eta = \frac{1}{6}\left(\xi^3 - \xi\right)$, dont les ordonnées décimales sont :

$\xi = \frac{x}{\ell}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\eta \cdot 10^4$	0	-165	-320	-455	-560	-625	-640	-595	-480	-285	0

Si la poutre ~~est~~ en moment d'inertie variable, on cherchera numériquement les déformées η_d et η_g des travées soumises à un moment γ d'extrémité unitaire négatif voir fig (6.10). et on les combinera par la formule (6.9).

4. Autres lignes d'influence.

La méthode la plus rapide consiste à considérer les Li des moments sur appui intermédiaires comme les Li primaires et toutes les autres comme Li secondaires qu'on peut déduire des Li primaires par superposition à l'aide de la statique.

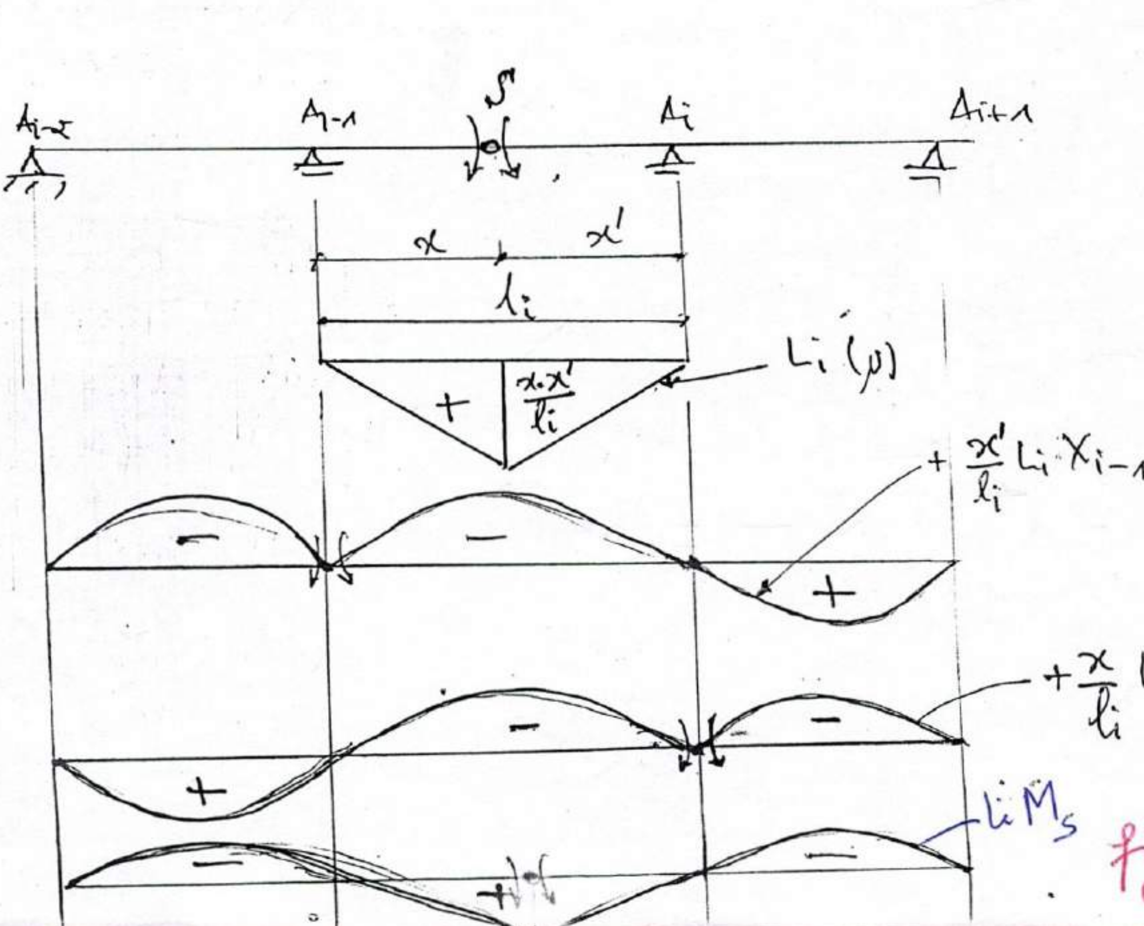


fig (6.11)

Ainsi par ex, le moment fléchissant dans li section S d'abscisse x donnée par

$$M_s = X_{i-1}\frac{x'}{l_i} + X_i\frac{x}{l_i} + \mu(x)$$

où $\mu(x)$ ~~est~~ le moment en x dû à la charge extérieure sur la poutre isostatique $A_{i-1}A_i$ et X_{i-1} et X_i les moments aux extrémités du tronçon isostatique.

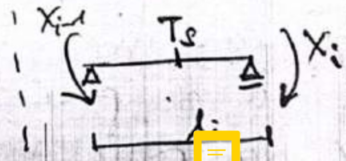
On en déduit directement la relation entre L_i des différentes quantités :

$$\boxed{L_i\, M_s = \frac{x'}{l_i}\, L_i X_{i-1} + \frac{x}{l_i}\, L_i X_i + L_i\, \mu} \qquad (6.10)$$

où L_i ~~est~~ un opérateur qui signifie ligne d'influence voir fig (6.11)

De même l'effort tranchant dans la section S d'abscisse x de la travée l_i vaut :

$$T_s = \frac{-X_i - X_{i-1}}{l_i} + \tau(x)$$



D'où

$$\boxed{L_i T_s = -\frac{1}{l_i} L_i X_i - \frac{1}{l_i} L_i X_{i-1} + L_i \tau} \qquad (6.11)$$

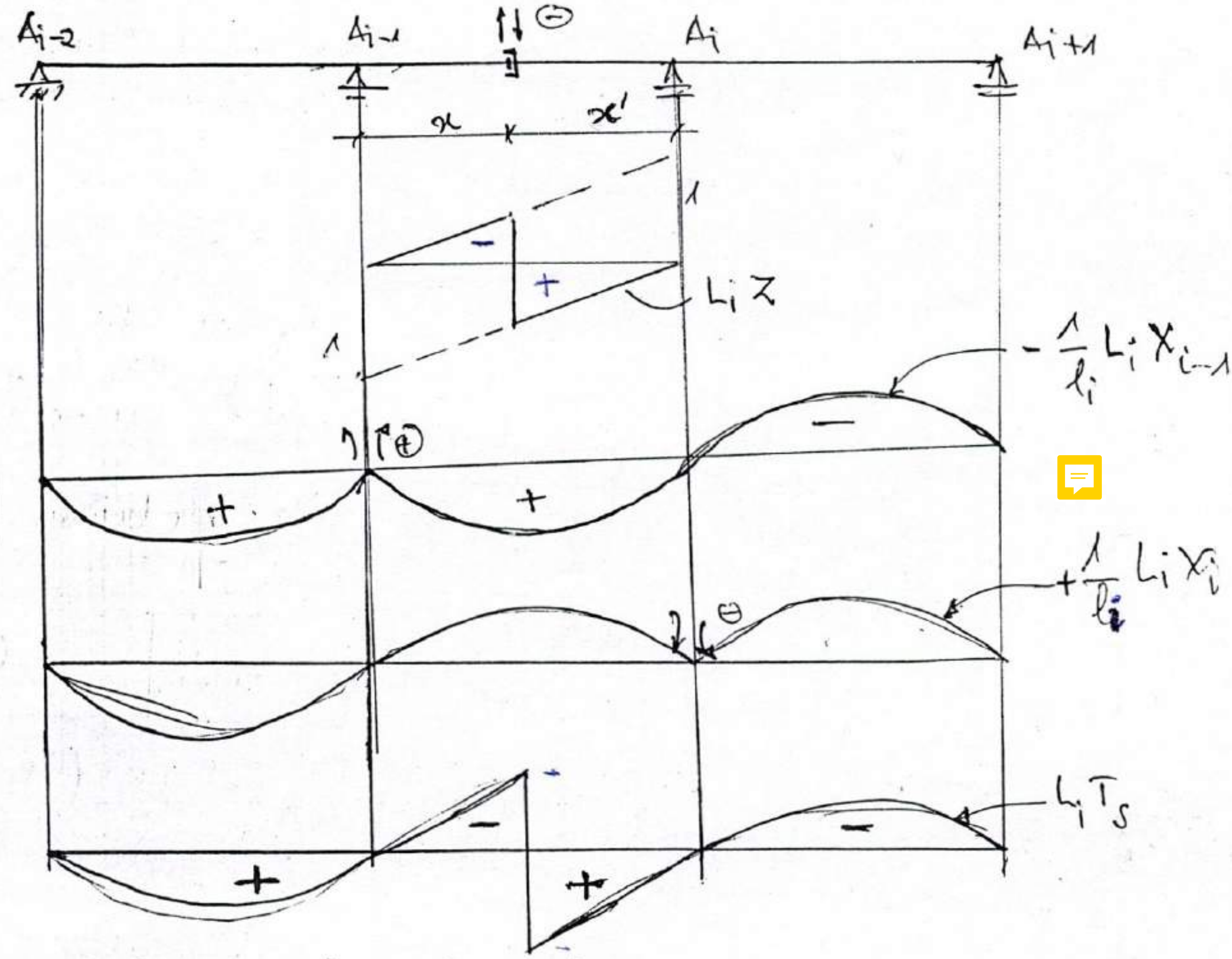


Fig (6.12)

√ La li d'une réaction d'appui s'obtient à partir de l'équation d'équilibre voir Fig 6.13.

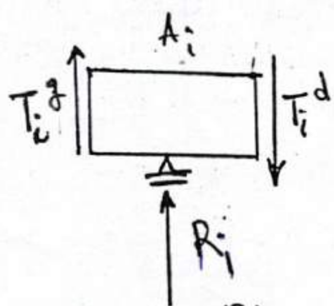


Fig. (6.13)

$$R_i = -T_i^g + T_i^d$$

$$L_i R_i = -L_i T_i^g + L_i T_i^d$$

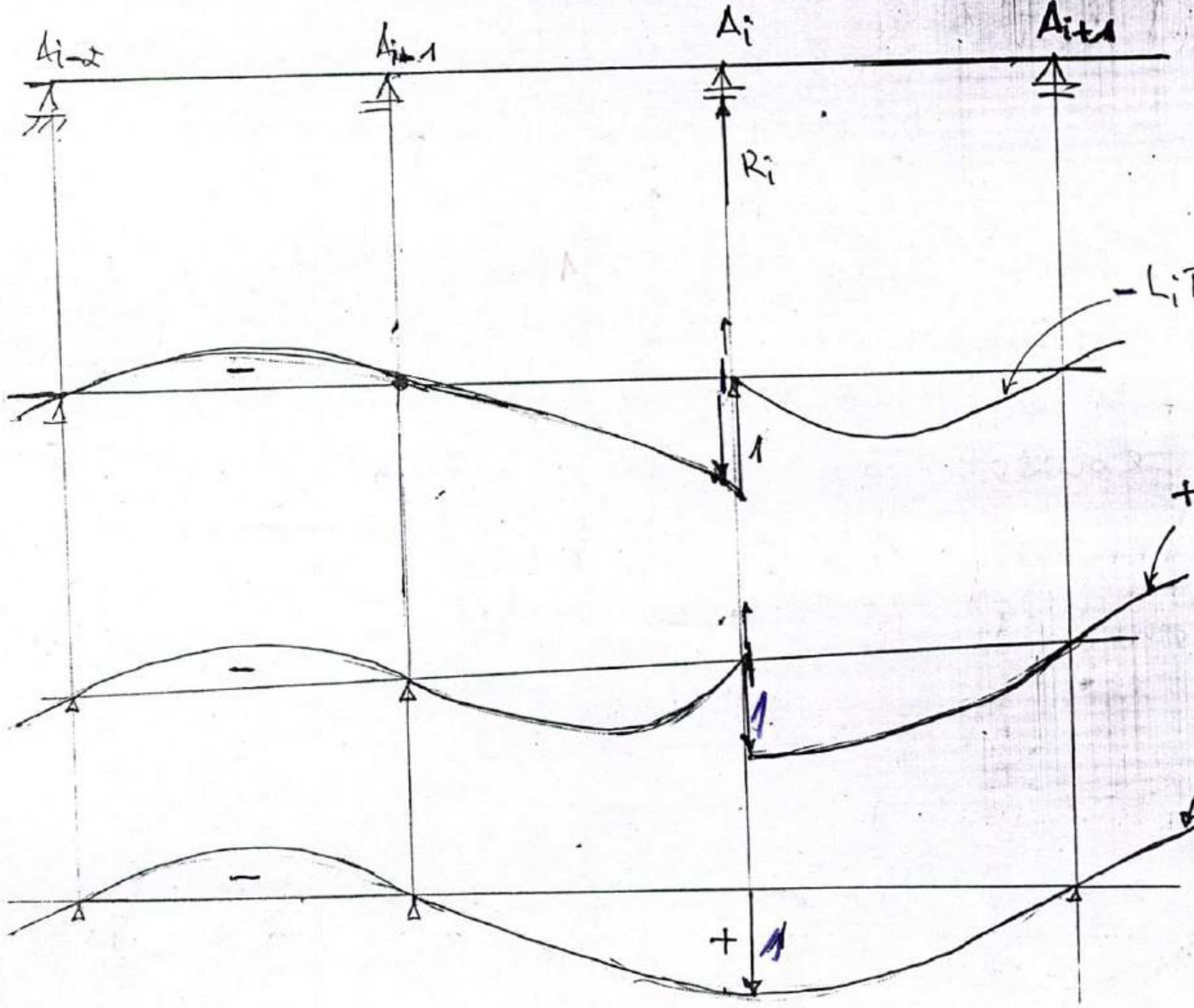


Fig (6.14)

Rmq : On peut utiliser les abaques qui sont des lignes d'influences préétablies pour les cas courants.

6.4.2. Systèmes en treillis une fois hyperstatique (charges fixes)

1. Théorie générale

Soit X_1, inconnue hyperstatique extérieure ou intérieure, supprimons cette inconnue par une coupure simple, le treillis devient isostatique. Appelons N_{i0} l'effort engendré dans la barre i, du S_0 par les ~~efforts~~ forces extérieures

et N_{i1}, l'effort engendré dans la barre i par 2 forces $X_1 = 1$
L'équation de compatibilité permettant de calculer X_1 s'écrit :

$$X_1 f_{11} = -f_{1p} \quad \text{(b)}$$

Les coefficients f sont donnés par l'expression (6.1) où N_i, N_j et N_p se rapportant au système isostatique de référence; i, j et p désignant l'effort qui cause N sont notés ici N_{i1} et N_{ip}. Les équations (6.1) deviennent

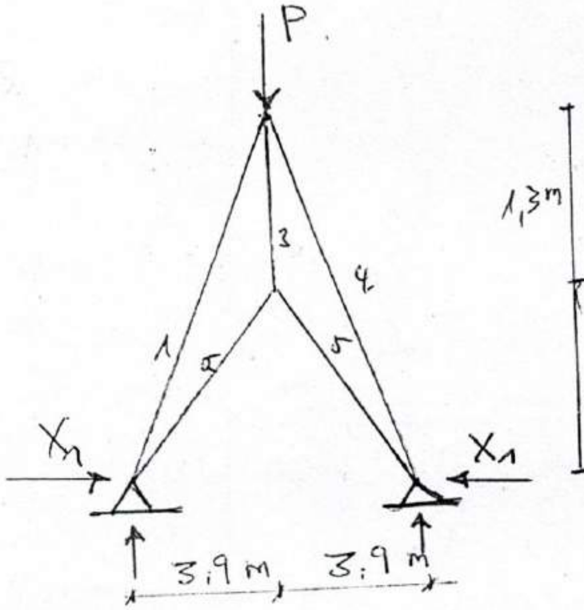
$$f_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{i1}^2 l_i}{E A_i} \; ; \quad f_{1p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{ip} N_{i1}}{E A_i} l_i$$

où n est le nombre total des barres du treillis hyperstatique; en remplaçant f_{11} et f_{1p} par ces valeurs dans (b) et en simplifiant par E on a :

$$\boxed{X_1 = - \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{N_{ip} N_{i1} l_i}{A_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{N_{i1}^2 l_i}{A_i}}} \qquad (6.13)$$

2. Applications

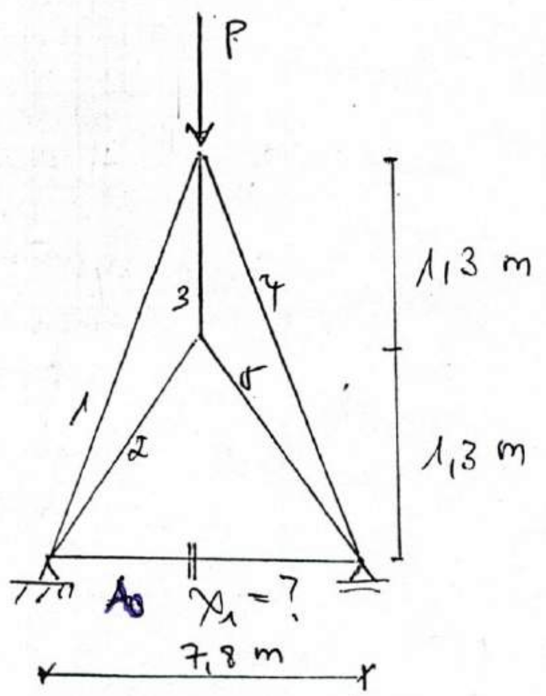
a) Soit à déterminer la poussée $H = X_1$ dans le système en treillis ci-contre dont les longueurs et les sections droites sont reprises dans les colonnes 2 et 3 ci-dessous.



1	2	3	4	5	6	7
i	l_i (m)	A_i (mm²)	N_{ip}	N_{i1}	$\frac{N_{ip} N_{i1} l_i}{A_i}$	$\frac{N_{i1}^2 l_i}{A_i}$
1	4,7	3 000				
2	4,11	1 800				
3	1,3	1 200				
4	4,7	3 000				
5	4,11	1 800				
					$\Sigma_1 =$	$\Sigma_2 =$

$$X_1 = -\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = 0,877\,P$$

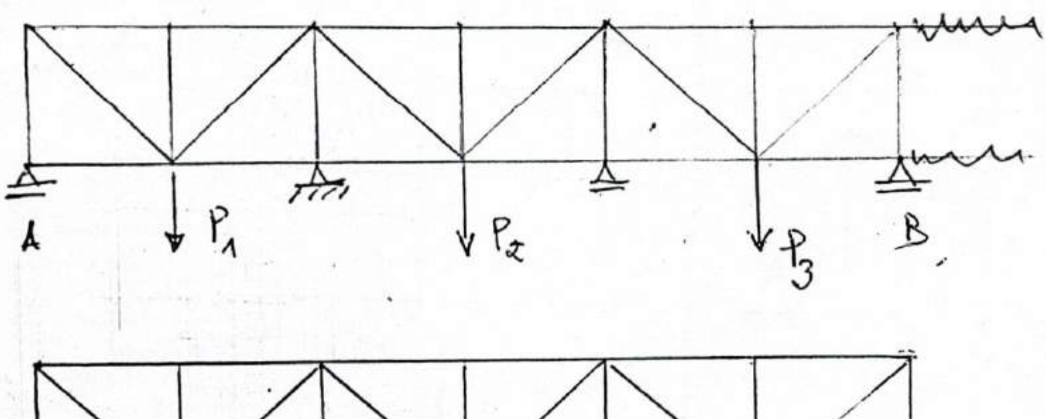
b)



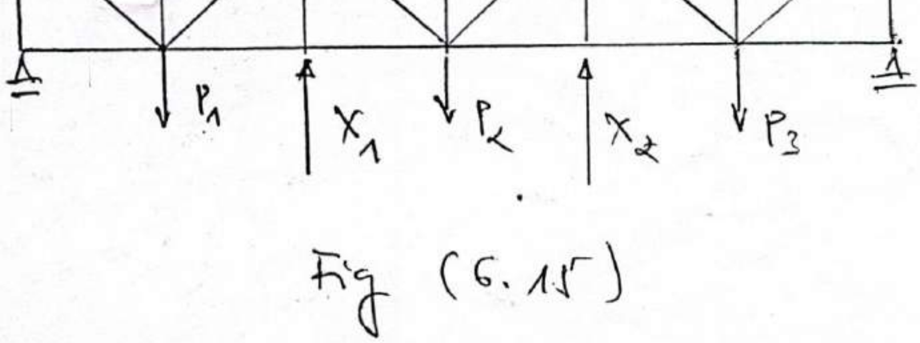
Soit à déterminer l'effort X_1 dans la barre horizontale du treillis ci-contre dont la longueur $l_0 = 7,8\,m$ et la section droite A_0. Les autres barres sont celles du problème a).
Quelle est l'unité de P et quelle est l'unité de A_0.

$$X_1 = \frac{23,47\,P}{\frac{7800}{A_0} + 26,75}$$

6.4.3. Systèmes en treillis plusieurs fois hyperstatiques (charges fixes)



(a)



(b)

Fig (6.15)

La méthode est celle du § 6.4.2 soit par exemple une poutre en treillis continue sur 4 appuis comme sur la figure (6.15). Ce système est deux fois hyperstatique. Choisissons comme inconnue hyperstatique X_1 et X_2 des réactions des appuis intermédiaires. Le S_0 est représenté dans la figure 6.15.b. Les équations de compatibilité s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i1}^2 l_i}{A_i} + X_2 \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i1} N_{i2} l_i}{A_i} &= - \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i1} N_{ip} l_i}{A_i} \\ X_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i1} N_{i2} l_i}{A_i} + X_2 \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i2}^2 l_i}{A_i} &= - \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{i2} N_{ip} l_i}{A_i} \end{aligned}} \qquad (6.14)$$

Dans (6.14)

N_{ip}, N_{i1} et N_{i2} représentent l'effort dans la barre i dans S_0 voir fig 6.15 b. sous l'effet respectivement de

a) P_1, P_2 et P_3

b) $X_1 = 1$

c) $X_2 = 1$

k = nombre total des barres du treillis hyperstatique.

Cette méthode s'étend aisément à un système n fois hyperstatique et s'applique aussi ~~sur~~ si les inconnues hyperstatiques sont dues à une variation de température, à un tassement d'appuis ou à tout autre phénomène.

6.4.4. Poutres hyperstatiques en treillis soumises à des charges mobiles

1. Poutre une fois hyperstatique (Intérieurement ou extérieurement)

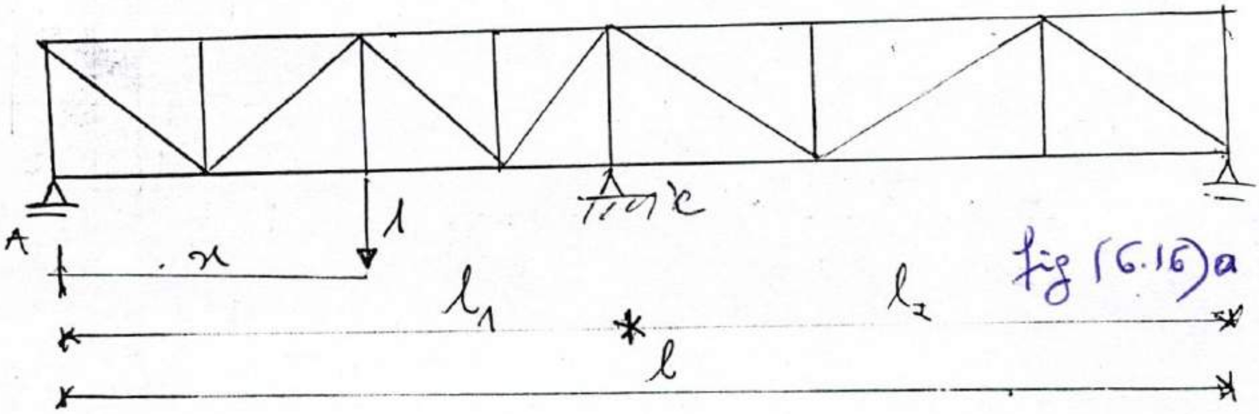
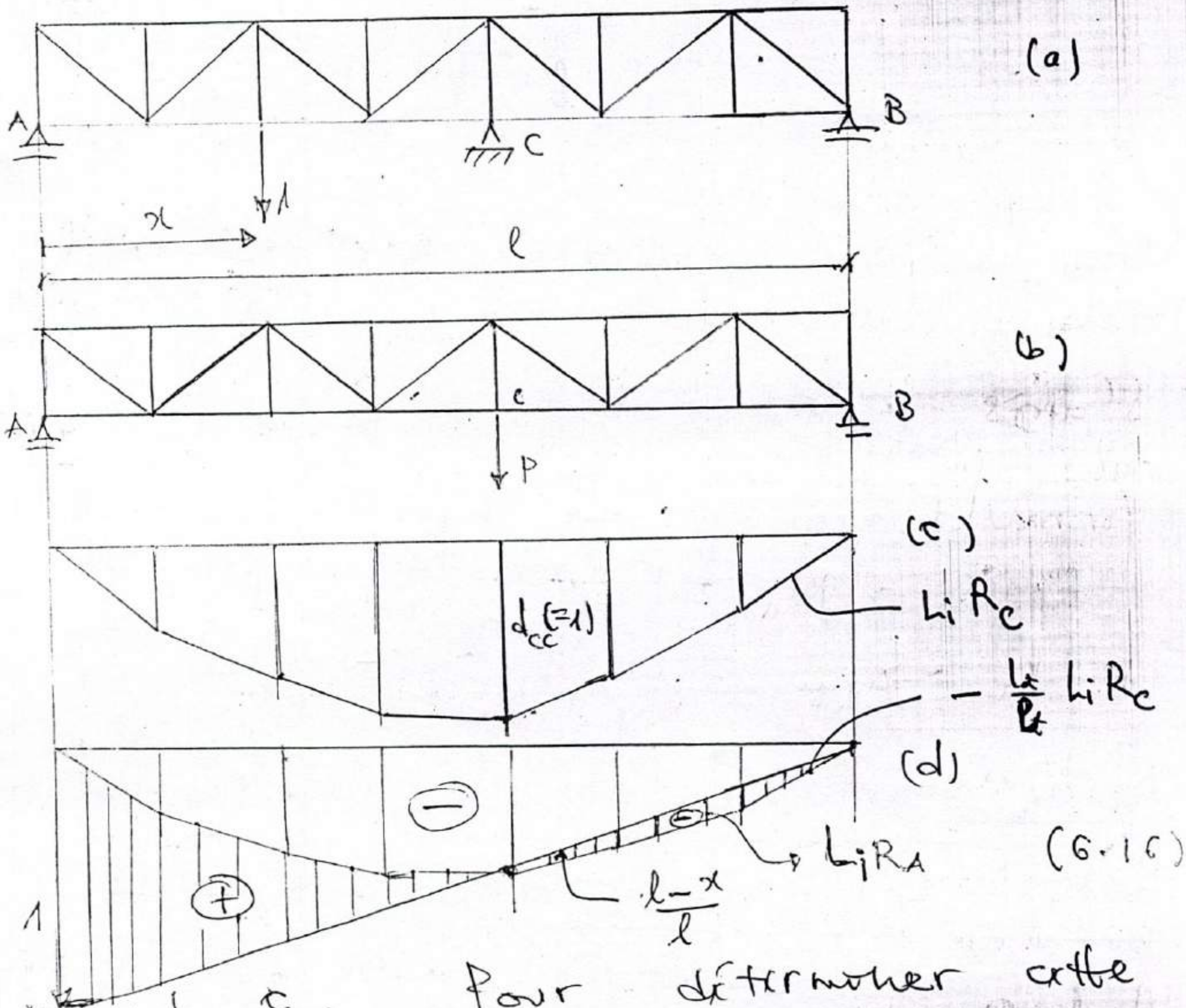


fig (6.16)a

Soit la fig. (6.16) d'une poutre en treillis sur 3 appuis. déterminons une ligne d'influence primaire (c'est la ligne d'inf. d'une inconnue hyperstatique) soit celle de la réaction $X_1 = R_c$ de l'appui intermédiaire.

D'après le th. de Land la Li de $X_1 = R_c$ est la déformée (de la fig 6.16.c) de la poutre en treillis AB sur les appuis simples sous l'effet d'une force verticale quelconque appliquée à C dans le sens contraire au sens positif de R_c. L'échelle est le déplacement vertical du



Noeud c. Pour déterminer cette déformée, on se servira du th. de la force unitée appliquée à tous les noeuds inférieurs intermédiaires.
Ayant la Li de R_C on en déduit n'importe quelle autre Li par la statique.
Par exemple pour trouver la Li de R_A on écrit l'équation d'équilibre des moments autour de B de la figure 6.16.a du syst. hyperstatique.

$$R_A = 1 . \frac{l-x}{l} - R_C \frac{l_I}{l} \Rightarrow \boxed{L_i R_A = \frac{l-x}{l} - \frac{l_I}{l} L_i R_C}$$

[voir fig. 6.16 . d]

D'une manière générale, on obtiendra la l.i d'un effort dans une barre qlcq i de la poutre hyperstat. proposée comme suit :

D'après le principe de superposition, l'effort dans la barre i est donné par la formule :

$$N_i = N_{ip} + N_{i1} R_C$$

Si la force unitaire se déplace, on a

$$\boxed{L_i N_i = L_i N_{ip} + N_{i1} L_i R_C} \quad . (6.16)$$

La relation ci-dessus montre que la l.i cherchée est la superposition de :

a) La L_i de N_{ip} dans la barre en question pour la poutre en treillis isostatique posée sur deux appuis simples A et B (la charge extérieure mobile est réduite à P=1 comme on doit t.jrs le supposer pour le calcul des L_i)

b) La L_i de R_C multipliée par N_{i1} : l'effort induit dans la barre en question dû à $R_C = 1$.

2. Poutre deux fois hyperstatique (extérieurement ou intérieurement) ou plus

Comme exemple prenons la poutre hyperstatique du paragraphe 6.4.3. fig. (6.15) Puisqu'il s'agit de chercher les L_i les forces extérieures P_1, P_2, P_3 en réduisant à $P = 1$ appliqué au noeud n quelconque de la membrure intérieure où s'applique la charge. Le système d'équation (6.14) peut s'écrire en abrégé de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned} X_1 f_{11} + X_2 f_{12} &= -f_{1m} \\ X_1 f_{21} + X_2 f_{22} &= -f_{2m} \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

f_{1m} = déplacement au pt de la coupure 1 lorsque la charge $P = 1$ s'applique en m dans le syst. isostat.

La résolution donne

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{f_{22}}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2} f_{1m} + \frac{f_{12}}{f_{11} \cdot f_{22} - f_{12}^2} f_{2m} \\ X_2 &= -\frac{f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2} f_{2m} + \frac{f_{12}}{f_{11} \cdot f_{22} - f_{12}^2} f_{1m} \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

En posant :

$$C_1 = \frac{f_{22}}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2} \quad ; \quad C_2 = \frac{f_{11}}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2} \quad ;$$

$$C_3 = \frac{f_{12}}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}$$

(6) devient :

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -C_1 f_{1m} + C_3 f_{2m} \\ X_2 &= -C_2 f_{2m} + C_3 f_{1m} \end{aligned}\right\}$$

selon Maxwell $f_{ij} = f_{ji}$;

Où f_{1m} et f_{2m} représentent aussi les ordonnées au droit du noeud m des déformées produites respectivement par une force unité appliquée en C (pt 1) et une force unité appliquée en D (pt 2) dans S_0.

Les L_i de X_1 et X_2 sont

$$\boxed{\begin{aligned} L_i X_1 &= -C_1 L_i f_{1m} + C_3 L_i f_{2m} \\ L_i X_2 &= -C_2 L_i f_{2m} + C_3 L_i f_{1m} \end{aligned}} \quad (F.\ 17)$$

La L_i de l'effort dans une barre i s'obtient par superposition. En effet :

$$\boxed{\begin{aligned} N_i &= N_{ip} + N_{i1} X_1 + N_{i2} X_2 \\ L_i N_i &= L_i N_{ip} + N_{i1} L_i X_1 + N_{i2} L_i X_2 \end{aligned}} \qquad (6.18)$$

Tous ces résultats s'étendent directement à une poutre n fois hyperstatique.

Formule de 3 moments

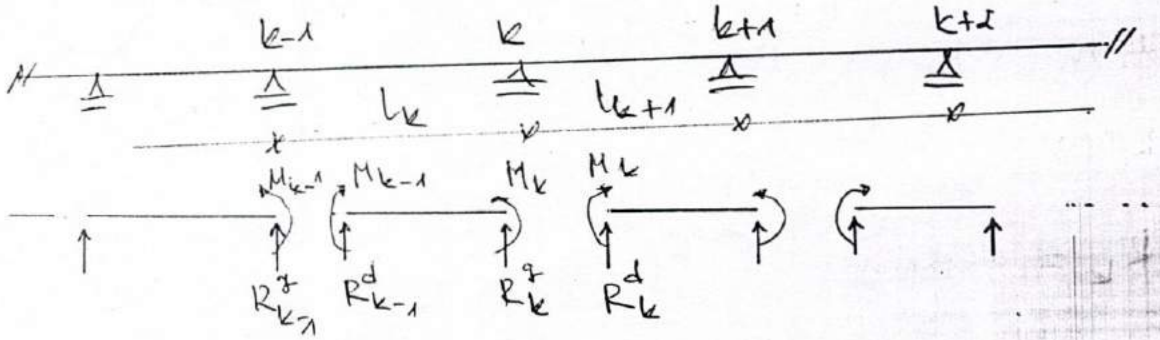
Hypothèse pour le cas courant :
- EI constante sur toute la poutre
- Système correspondant :

Formule:

$$\boxed{M_{k-1}\, l_k + 2M_k\,(l_k + l_{k+1}) + M_{k+1}\, l_{k+1} = -\frac{6}{l_k}\int_0^{l_k} M_{SF}\, x\, dx - \frac{6}{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}} M_{SF}\,(l_{k+1}-x)\, dx} \quad (*)$$

Où M_{SF} = Moment produit dans la section courante de l_k par les charges extérieures qui lui sont appliquées

-> M_k et M_{k+1} = moment fléchissants agissant au droit de chaque appui intermédiaire ici les appuis k et k+1



(*). Rmq : On peut remplacer le 2nd membre (*) par la réaction fictive en k

$R_F^k = R_k^{g(F)} + R_k^{d(F)}$. On écrit l'équation de 3 moments pour chaque appui intermédiaire.

Points Particuliers

1) Présence d'un encastrement : on remplace l'encastrement par une poutre adjacente dont on fera tendre la longueur vers zéro en appliquant la formule de 3 moments.

2) Couple concentré en un appui intermédiaire : on peut soit le diviser entre les deux travées adjacentes, soit le reporter sur l'une des deux.

3) Présence d'un porte-à-faux (console) : La console sera remplacée par ses effets pour l'application de la formule de 3 moments.

⊛ Calcul des éléments de réduction

1) Réaction de l'appui k

- Action des moments aux appuis seul :

$$R^{g}_{k(M)} = \frac{M_{k-1} - M_k}{l_k}$$

$$R^{d}_{k(M)} = \frac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}}$$

- Action des forces extérieures

$$R_{k(F)} = R^{g}_{k(F)} + R^{d}_{k(F)}$$

d'où $R_k = R_{k(F)} + \dfrac{M_{k-1} - M_k}{l_k} + \dfrac{M_{k+1} - M_k}{l_{k+1}}$

2) Moment fléchissant

Le diagramme final est obtenu par superposition des diagrammes (des travées isostatiques) des charges extérieures et des moments appliqués aux appuis. Cherchons l'expression du moment fléchissant dans la section courante de la travée l_k d'abscisse x par rapport à l'appui $k-1$).

chaque travée l_k du système de base se comporte comme une poutre bi articulée, sollicitée, en plus des charges extérieures, par deux couples M_{k+1} et M_k appliqués à ses appuis. Si on désigne par $M_{s(F)}$ le moment produit dans la section courante de l_k par les charges extérieures qui lui sont appliquées, alors l'expression général du moment fléchissant s'écrit :

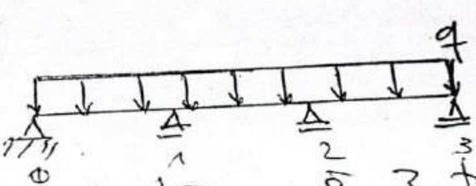
$$\boxed{M_s = M_{s(F)} + M_{k-1} + (M_k - M_{k-1})\frac{x}{l_k}}$$

3) Effort tranchant

$$T_s = T_{s(F)} + \frac{M_k - M_{k-1}}{l_k}$$

où $T_{s(F)}$ = Effort tranchant dû aux charges extérieures.

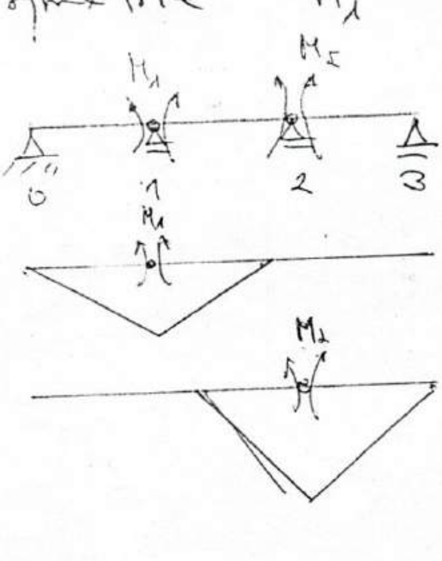
Exemple :



Considérons une poutre à 3 travées égales et à inertie constante soumise à une charge q.

Sol : Poutre 2 fois hyperstatique.

Symétrie $M_1 = M_2$.



$M_0 = M_3 = 0$. On écrit l'équation des 3 moments pour $k = 1$

$$M_0 L_0 + 2 M_1 (L_1 + L_2) + M_2 L_2 = -6 EI \left(R_1^{g(F)} + R_1^{d(F)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 5 ML = -6 EI \left(2 R_1^{g(F)}\right) \quad ; \quad R_1^{g(F)} = R_1^{d(F)}$$

$$5 ML = -12 EI R_1^{g(F)}$$

$$R_1^{g(F)} = \frac{1}{2EI}\left(\frac{2}{3}\,\frac{qL^2}{8}\,L\right) = \frac{qL^3}{24EI}$$

$\Rightarrow \quad M = -\dfrac{qL^2}{10}$, M est dans le sens opposé au sens choisi arbitrairement.

6/5/88

Ch. 7. - Extension de la méthode des forces

7.1. Extension de la notion de coupure : Notion de centre élastique

7.1.1. Extension de la notion de coupure.

Soit, par ex., le portique à montants encastrés de la fig. (7.1). La méthode des forces classique pour résoudre ce système, est de pratiquer dans la traverse une coupe totale, fig. (7.1). On écrira ensuite les équations exprimant que cette coupe totale ne subit aucun déplacement relatif (dans les 3 sens (angulaire, vertical, long.)). Ce qui fournit 3 équations les équations de compatibilité dont la résolution donne X_1, X_2 et X_3.

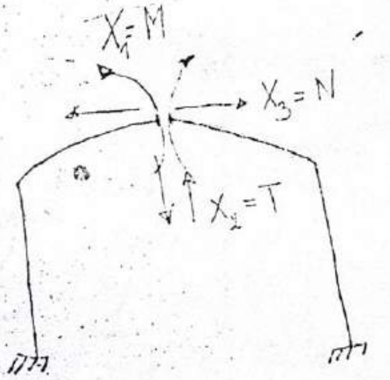


fig (7.1).

On peut représenter les 3 degrés de liberté introduits par la coupe totale d'une infinité de manière. Par exemple, on peut supposer, fig (7.2) que les bords de la coupe soient munis de 3 dispositifs comprenant chacun 2 bras rigides //, de même longueur, et infiniment rapprochés.

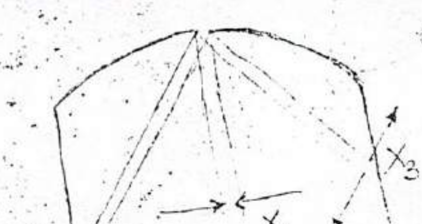


fig (7.2).

Si on applique à chacun de ces dispositifs une paire d'efforts X égaux et opposés, on peut annuler les déplacements relatifs de la coupe en se servant comme inconnues les 3 paires d'efforts X_1, X_2, X_3 et en imposant que les extrémités de chaque paire de bras rigides ne subissent pas de déplacement relatif dans le sens des X qui leur sont imposés.

verso

Pour l'établissement des équations de compatibilité, les coefficients f_{ij} et f_{ip} continuent à se calculer par les formules :

$$f_{ij} = f_{ji} = \int_0^s \frac{M_i M_j \, ds}{EI} \quad \text{et} \quad f_{ip} = \int_0^s M_i M_p \frac{ds}{EI}$$

7.1.2. Le centre élastique

L'extension de la notion de couple ci-dessus aboutit à la notion du "centre élastique".

Soit, p. ex., le portique bi-encastré symétrique de la fig. (7.3) que nous nous proposons de résoudre en adoptant les inconnues hyperstatiques suivantes :

a.- $X_1 = 1$ constituée par deux couples égaux et opposés. fig (7.3 a)

b.- X_2, constituée par 2 efforts verticaux égaux et opposés, non de valeur $\frac{2}{L}$ et non de valeur unité afin que M_2 ait des caractéristiques simples (valeurs unités aux extrémités) fig (7.3 b)

c.- $X_3 = 1$, constituée de 2 efforts horizontaux unitaires opposés, appliqués aux extrémités de 2 bras rigides verticaux dont la longueur reste à préciser.

Diagr. M_1, M_2 et M_3, voir fig (7.3)

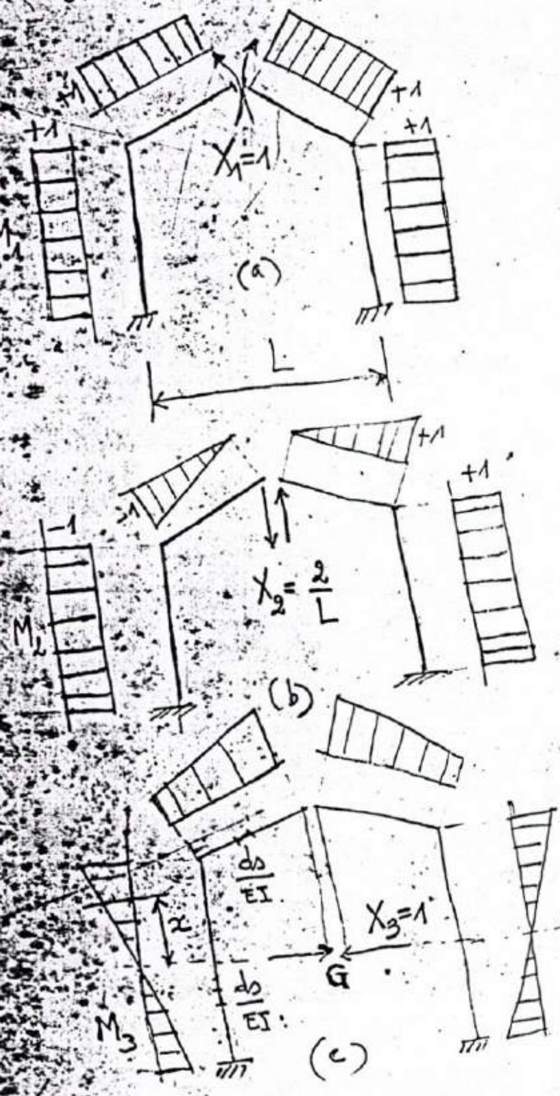


fig (7.3)

les diagrammes de M_1 et de M_3 sont symétriques ~~sont symétriques~~ par rapport à l'axe vertical de symétrie du portique, et le diag de M_2 est antisymétrie par rapport au m axe. D'où :

$$f_{1,2} = \int_0^s M_1 \cdot M_2 \frac{ds}{EI} = 0 \; ; \; f_{2,3} = \int_0^s M_2 \cdot M_3 \frac{ds}{EI} = 0$$ (Quelle que soit la longueur des bras rigides)

On peut choisir la longueur des bras rigides afin d'avoir $f_{1,3} = 0$. On a : $f_{1,3} = \int_0^s M_1 \cdot M_3 \frac{ds}{EI}$,

mais $M_1 = 1$ quel que soit le ds considéré et $M_3 = x$, x étant la distance de ds considéré à l'alignement horizontal du point G, fig (7.3c). D'où

$$f_{1,3} = \int_0^s x \frac{ds}{EI}$$

Pour annuler $f_{1,3}$, il faut annuler cette intégrale, ce qui impose de choisir comme niveau du point G, celui du centre de gravité des quantités $\frac{ds}{EI}$ du système, connues sous le nom de poids élastiques. Si on réalise cette condition, les équations de compatibilité se réduisent à :

$$f_{11} X_1 = - f_{1p} \Rightarrow X_1$$

$$f_{22} X_2 = - f_{2p} \quad \left(\text{où } \tfrac{\ell}{2} \text{ intervient dans les 2 membres, ce qui ne change rien}\right) \Rightarrow X_2$$

$$f_{33} X_3 = - f_{3p} \Rightarrow X_3$$

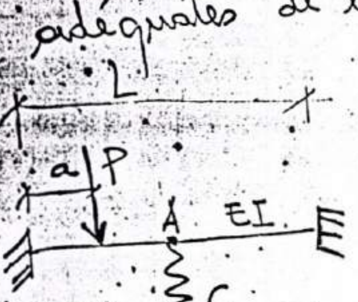
Le point G de l'axe de symétrie du portique s'appelle centre élastique. La généralisation de ces résultats pour n'importe quel arc ou portique bi-encastré ou cadre fermé est aisée. Toutefois c'est seulement dans la théorie des arcs bi-encastrés symétriques que le centre élastique présente un certain intérêt car pour les autres structures la recherche du dit centre est souvent plus long que leur résolution (de façon) classique.

(7.1) 7.2. Emploi d'une structure de référence hyperstatique

Jusqu'à présent, on a adopté comme structure de référence, la structure proposée rendue isostatique par n coupures simples et on a considéré les n efforts libérés comme inconnues du problème.

Le raisonnement reste valable si l'on ne considère comme inconnues surabondantes que h de ces n inconnues $(h<n)$ et si l'on adopte comme structure de référence la structure $(n-h)$ fois hyperstatique résultant. L'intérêt de cette modification est de diminuer le nombre d'équations à résoudre.

Mais la condition essentielle à remplir afin de calculer les coefficients f_{ij} et f_{ip} du système de h équations de compatibilité est de disposer d'un <u>formulaire</u> donnant les propriétés élastiques adéquates de la structure hyperstatique de référence.



en réalité A fond (?) pratiquement nul ou négligeable les déformations dues à N

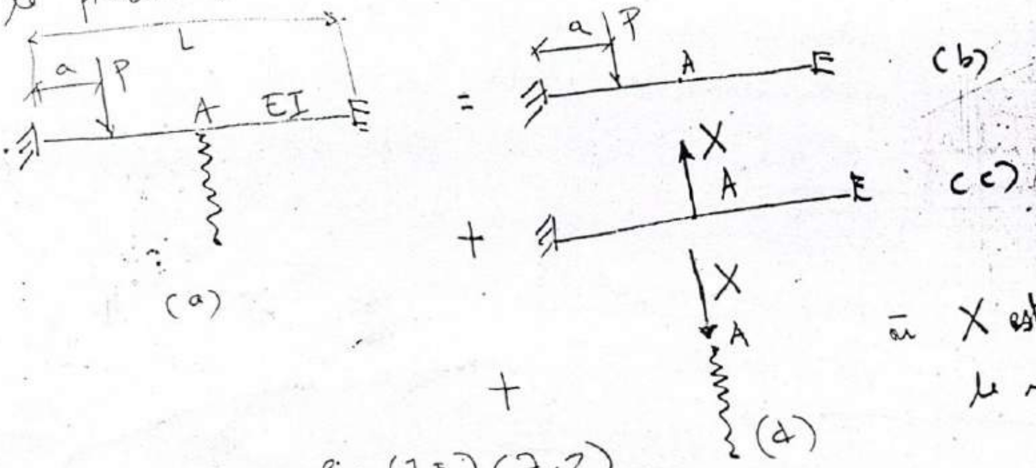
fig (7.4)

(7.1)

<u>Exemple</u> : Soit à étudier la poutre bi-encastrée symétrique prismatique, chargée d'une force P et soutenue en son milieu par un appui élastique, fig. (7.4).

La structure est 3 fois hyperstatique [et sa résolution par la méthode classique générale n'est pas aisée].

Adoptons comme structure de référence la poutre bi-encastrée [et le problème se résout directement.] En effet :



où X est l'effort (décompression) dans le ressort.

fig (7.5) (7.2).

D'après la résistance des Mat., le déplacement du milieu d'une poutre bi-encastrée sous l'effet d'une force concentrée P d'abscisse "a" vaut :

$$y_{A,P} = \frac{P a^2}{48 EI} (3L - 4a)$$

Sous l'effet de X au milieu de la poutre, fig (7.5 b),

$$y_{A,X} = - \frac{X L^3}{192 EI}$$

le coefficient de rigidité du ressort $K = \frac{1}{C}$

et, avec C la constante dite coefficient de flexibilité du ressort ;

$$y_{A,R} = C \cdot X$$

En égalant les flèches (flèche de E = flèche de ressort) on a :

$$C \cdot X = \frac{P a^2}{48 EI} (3L - 4a) - \frac{X L^3}{192 EI} \Rightarrow X$$

Une fois X connu, l'étude de la poutre bi encastrée se poursuit par la Résist. des M. ou par usage des formulaires.

~~En particulier~~ $\cancel{y_A = y_{A,P} + y_{A,X} + y_{A,R}}$

[La structure hyperstatique pour laquelle on possède le plus de tables et d'abaques étant la poutre continue sur appuis fixes, on emploiera très souvent la technique de la structure de référence hyperstatique dans des constructions où interviennent des poutres continues, p. ex. ds les poutres continues sur appuis élastiques et les grillages de poutres.]

7.3 A Poutres sur appuis élastiques

Soit la poutre sur appuis élastiques de la fig. 7.3 (7.6). Pour déterminer les sollicitations, on procède comme suit :

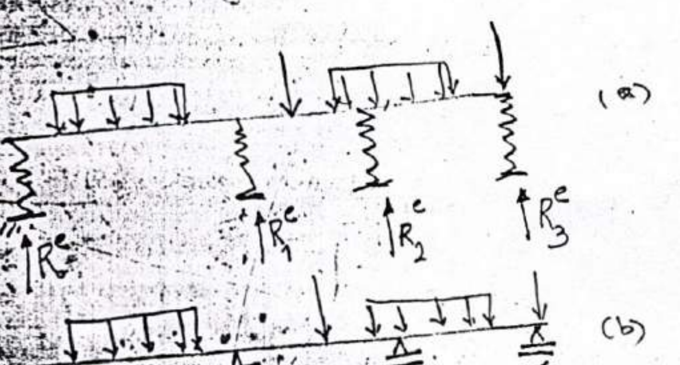


fig (7.6) (7.3) ✓

a) On suppose que la poutre est posée sur appuis fixes, fig (7.3b) (7.6 b) ; on détermine par les méthodes classiques ou à l'aide des abaques, les valeurs des moments sur appuis M_i^f et des réactions d'appui R_i^f

b) On considère fig (7.6.c) la poutre sur appuis élastiques débarrassée de ses charges et soumises au droit des appuis à des forces égales et opposées aux réactions d'appuis R_i^f trouvées à la fig b (b). On étudie ce problème, beaucoup plus simple (voir prochain chapitre) et on détermine les moments sur appuis M_i^e et les réactions d'appuis R_i^e.

c) Par superposition, pour retrouver la structure réelle du départ, les moments sur appuis et les réactions d'appuis sont données respectivement par : $M_i^f + M_i^e$ et R_i^e.

La technique de superposition développée ci-dessus se généralise pour une structure (construction) quelconque posée sur appuis déformables de manière quelconque par l'énoncé suivante :

" Pour étudier une structure (construction) quelconque posée sur appuis déformables, on commence par étudier la structure (construction) posée sur appuis fixes, et on détermine les réactions de ces appuis. On applique alors à la structure (construction) ces réactions changées de signe et on détermine les sollicitations de cette construction pour les conditions données de déformabilité des appuis. La sollicitation réelle est la somme des sollicitations obtenues dans les deux problèmes partiels ".

Exemple : Soit une poutre sur 3 appuis à appuis discordants, fig. 7.4 (7.7), l'appui central étant trop bas de la quantité r.

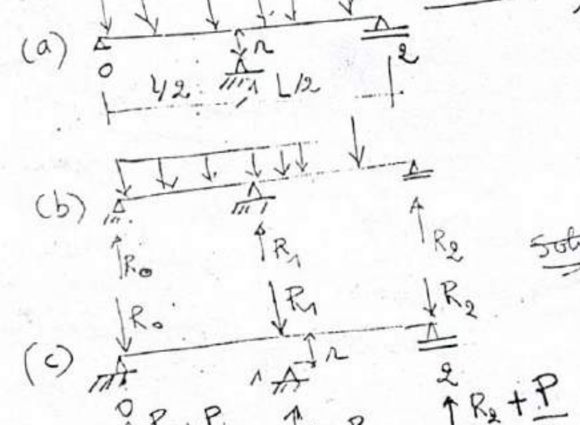


fig (7,7) (7.4)

charge à suivre } On commence par étudier la poutre continue sur appuis concordants de la fig. 7.4b (7.7b), puis on applique les réactions d'appui changé de signe, à la poutre à appui discordants (c).

Solution : ~~Après calcul de (b),~~

R_0 et R_2 repris directement par les appuis 0 et 2, n'engendrent pas de flexion.

Sous R_1, du système (c), la poutre 02 fléchit jusqu'à ce que sa flèche $PL^3/48EI$ vaille r. Cela se produit quand R_1 atteint la valeur $P=\frac{48EIr}{L^3}$.

A partir de ce moment, l'effort supplémentaire est repris intégralement par l'appui 1. Au total, les réactions d'appuis valent : $R_0 + \frac{P}{2}$, $R_1 - P$ et $R_2 + \frac{P}{2}$.

Sous hypothèse $R_1 > P$. Sinon ... faits R comme si au milieu ($R=0$) ~~[illegible] ($R_1 = 0$)~~ aux extrémités ~~[illegible]~~ $R_0 + \frac{R_1}{2}$, $R_2 + \frac{R_1}{2}$

B. Grillages de poutres

La fig (7.5) présente un grillage de poutres, où les poutres ne sont pas nécessairement // mais situées ds un même plan et ont des conditions aux limites quelconques.

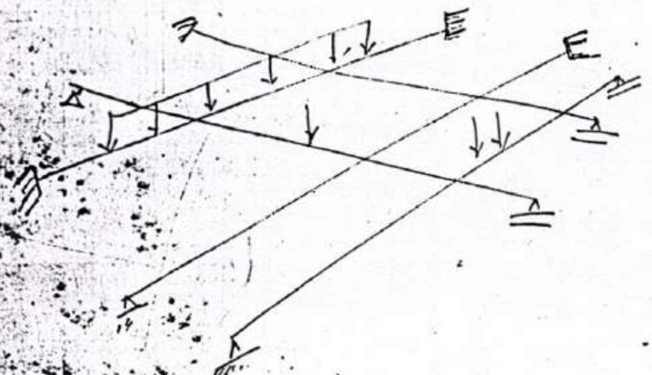


fig (7.8).
7.5

Ici, on placera des appuis fixes provisoires au droit de chacun des noeuds du grillage. (Si on néglige la résistance à la torsion des poutres) le système se transforme en une série de poutres continues indépendantes sur appuis fixes. On détermine par la théorie classique des poutres continues les réactions d'appuis, qu'on applique ensuite changées de signes au grillage réel.

Ch. 8 Quelques applications importantes de la méthode des forces.

8.1. Détermination des déplacements dans les structures hyperstatiques — Théorème de réduction.

8.1.1. Rappel

D'après le théorème de la force unité, le déplacement d d'un point A quelconque d'une structure hyperstatique, déformée par une cause quelconque, dans la direction donnée Δ_A, s'obtient par la formule

$$d = \int_{st} \frac{M M_1 \, ds}{EI} + \cdots \qquad (8.1)$$

où $M, \ldots$ sont les éléments de réduction réels dans la structure déformée et $M_1, \ldots$ sont les éléments de réduction qui assurent l'équilibre de la structure sous l'effet d'une force concentrée unitaire $P=1$ appliquée en A dans la direction Δ_A.

8.1.2 Première réduction

Le théorème de la force unité n'exige pas que les efforts intérieurs $M_1, \ldots$ soient ceux créés par la force unité $P=1$ dans la structure hyperstatique proposée. Il exige seulement que le système de force $(P=1, M_1, \ldots)$ soit statiquement admissible. D'où les $M_1, \ldots$ peuvent être déterminés dans n'importe quelle structure ayant la même forme géométrique que celle hyperstatique proposée mais d'un degré d'hyperstaticité moindre, obtenu en réalisant diverses coupures dans la structure proposée. En particulier les $M_1, \dots$ peuvent être obtenus à partir de la structure rendue isostatique. Si on désigne ces valeurs particulières par les notations $M_{1,0}, \dots$, la formule (8.1) s'écrit :

$$d = \int_{structure} \frac{M \cdot M_{1,0} \, ds}{EI} + \dots \qquad (8.2).$$

cette relation constitue la première partie du Théorème de réduction.

8.1.3. <u>Seconde réduction</u>

Soit à nouveau la formule (8.1) dans laquelle nous supposons que $M_1, \dots$ sont des efforts intérieurs dus à $P = 1$ calculés dans la <u>structure hyperstatique</u>. Par le principe de superposition des forces, les éléments de réduction <u>réels</u> $M, \dots$ valent :

$$M = M_p + X_j M_j \quad (j = 1, \dots, n) \qquad \begin{cases} N = N_p + X_j N_j \\ T = T_p + X_j T_j \end{cases}$$

En introduisant ces relations dans (8.1), on a :

$$d = \int_{str.} \frac{M_p M_1 \, ds}{EI} + X_j \int_{str.} \frac{M_j M_1 \, ds}{EI} + \dots$$

≈ 0 d'après la 1re réduction

où (*) M_p et M_j sont relatifs au système isostatique de référence.

En désignant les moments M_p par $M_0, \dots$, on a :

$$d = \int_{str.} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} \, ds + \dots \qquad (8.3)$$

cette expression constitue la seconde partie du théorème de réduction.

8.1.4. Théorème de réduction : Il s'exprime ...

8.2 Poutres continues sur appuis élastiques : (voir texte)

a. - Aux diagrammes <u>triangulaires</u> habituels des M_i dans les deux travées de part et d'autre de l'appui A_i,

b. - A des efforts de <u>compression ou de traction</u> sur les 3 appuis élastiques A_{i-1}, A_i et A_{i+1} provoqués par $X_i = 1$ désignés par R_{i-1}, R_i et R_{i+1}.

Ces efforts valent (en isolant chaque travée) :

$$R_{i-1} = \frac{1}{l_i} \quad ; \quad R_i = \frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \quad ; \quad R_{i+1} = \frac{1}{l_{i+1}} \qquad (a)$$

Considérons l'ensemble du problème, fig (8.6).

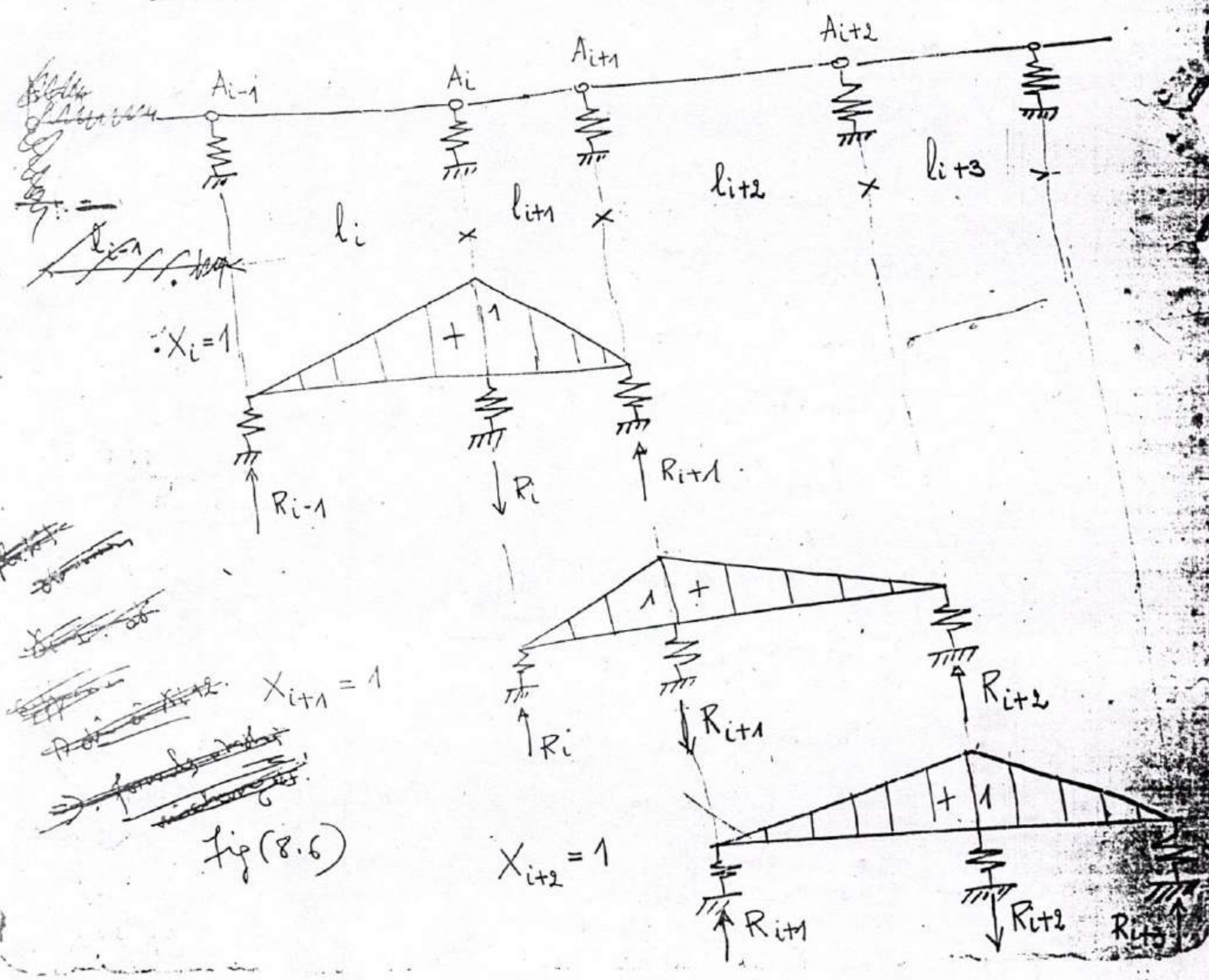


fig (8.6)

8.2.4. Equations de compatibilité

Si on néglige les déformations dues à T,

$$f_{ij} = \int_{poutre} \frac{M_i M_j \, ds}{EI} + \sum_{ressorts} R_i R_j C$$

A l'aide de la fig (8.6) et des relations (a), on a :

$$f_{ii} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}} + \frac{c_{i-1}}{l_i^2} + c_i \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 + \frac{c_{i+1}}{l_{i+1}^2}$$

$$f_{i,i+1} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} - \frac{c_i}{l_{i+1}}\left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) - \frac{c_{i+1}}{l_{i+1}} \times \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right) \qquad (8.4)$$

$$f_{i,i+2} = \frac{c_{i+1}}{l_{i+1} \cdot l_{i+2}}$$

$(f_{i,i+2})$

$\delta_{11} X_1 + \delta_{1F} = 0$

On calculera aisément $f_{ip} = \int_{poutre} \frac{M_i M_p \, ds}{EI} + \sum_{ressorts} R_i R_p C$

La fig. 8.6. montre que $f_{ij} = 0$ dès que $j > i+2$, de sorte que la demi-matrice de flexibilité se présente :

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & & & \\ \cdot & f_{22} & f_{23} & f_{24} & & \\ & \text{Symétr.} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & \cdot \\ & & & f_{44} & f_{45} & \cdots \\ & & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

21/5/88
27

Ch. 9 : Développement de la méthode des déplacements.

9.1. Classification des structures formées de barres*.

Surtout dans l'application de la méthode des déplacements, il est utile de classer les structures en 6 groupes en fonction du nombre et du type des :

a) degrés de liberté d'un noeud (inconnues cinématiques)

b) efforts intérieurs dans une section (inconnues hyperstatiques).

Cette classification permet d'éviter de ramener l'étude d'une structure simple (plane p. ex.) au cas général et compliqué de la structure spatiale.

A. – Poutres continues

On entend par poutre continue, une structure se développant suivant une ligne droite et soumise à flexion simple seulement, fig. (9.1).

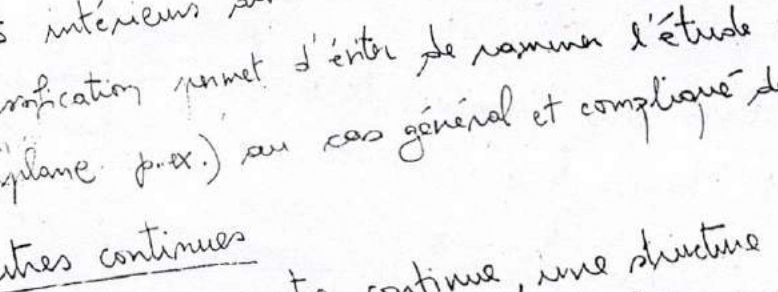


fig (9.1)

Un noeud qcq possède deux degrés de ~~mobilité~~ liberté :

- un déplacement vertical
- une rotation
- (déplacement horizontal négligeable)

Cependant si l'on désire travailler avec un minimum d'inconnues cinématiques, on ne considérera que les noeuds au droit des appuis simples qui ne possèdent qu'un seul degré de liberté (rotation)

verso

---

* Rappelons que la méthode des forces et celles des déplacements s'appliquent à toutes les structures : plaques, coques, etc...

et il y aura autant d'inconnues D que d'appuis simples.

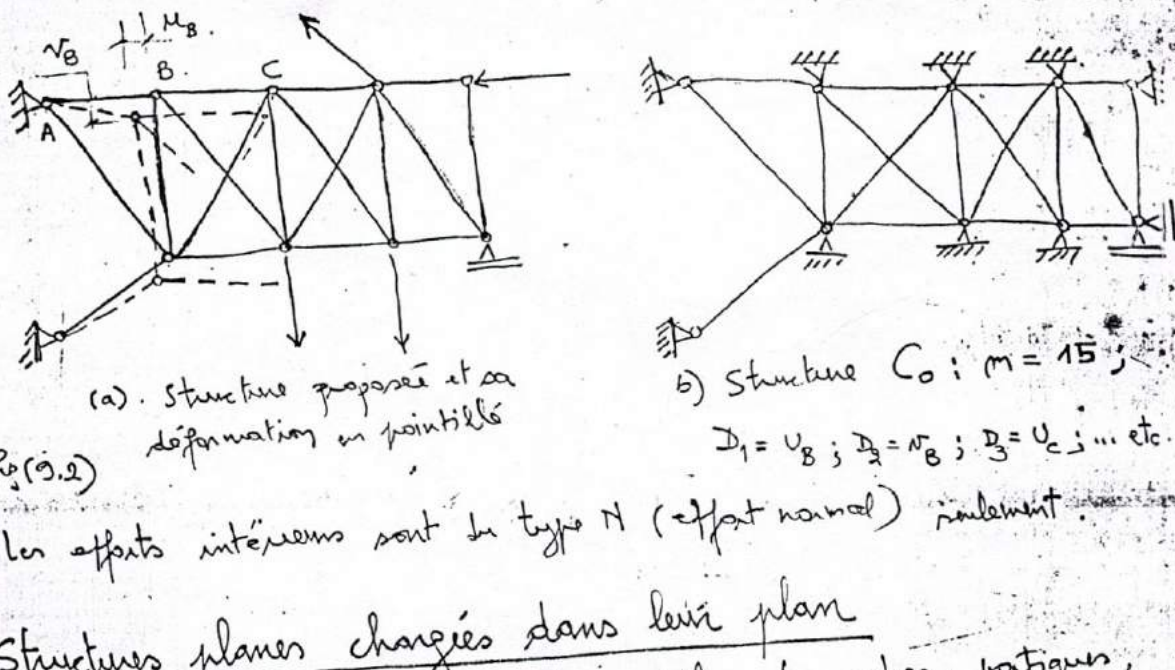
Dans une section quelconque, il y a <u>deux</u> efforts intérieurs :

- un moment de flexion,
- un effort tranchant

(- un effort normal, éventuel, se détermine directement et à part !)

B. <u>Treillis plans</u>

Ces structures sont formées de barres articulées parfaitement aux noeuds et chargés en ces noeuds par des forces concentrées, fig.(9.2).



(a). Structure proposée et sa déformation en pointillé

b) Structure C_0 ; $m = 15$;

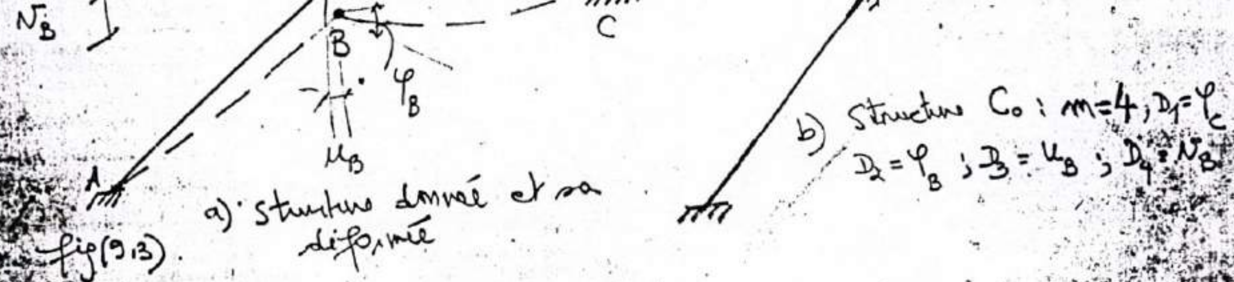
$D_1 = u_B$; $D_2 = v_B$; $D_3 = u_C$; ... etc...

fig(9.2)

Les efforts intérieurs sont du type N (effort normal) seulement.

C. <u>Structures planes chargées dans leur plan</u>

Il s'agit de toutes les variétés possibles de cadres, portiques, arcs, et autres ossatures planes fig (9,3)



a) structure donnée et sa déformée

b) Structure C_0 : $m=4$; $D_1 = \varphi_C$; $D_2 = \varphi_B$; $D_3 = u_B$; $D_4 = v_B$

fig(9.3).

Dans une section qlcq, il y a 3 efforts intérieurs :

- un moment de flexion,
- un effort tranchant
- un effort normal.

D. Structures planes chargées perpendiculairement à leur plan

Ce sont toutes les variétés possibles de grilles de poutres et structures analogues. fig. (9.4).

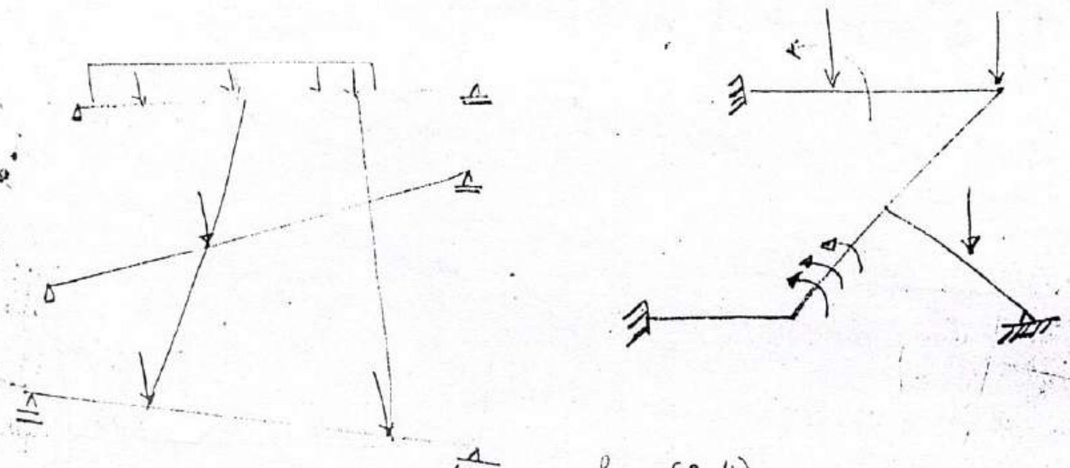


fig (9.4).

Un nœud possède 3 degrés de liberté :

- un déplacement perpendiculaire au plan de la structure,
- deux composantes de sa rotation, toutes deux situées dans le plan de la structure (règle du tire-bouchon)

Dans une section qlcq d'une barre, les efforts intérieurs sont :

- un effort tranchant
- un moment de flexion (dans le plan de la structure, règle du tire bouchon)
- un moment de torsion (")

Verso →

E. Treillis spatiaux

Ce sont les structures du type B étendues à l'espace, comme p. ex les pylônes de ligne électrique et de télécommunication, fig (9.5)

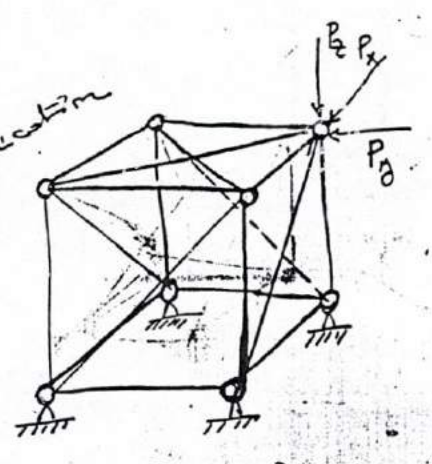


fig (9.5)

Un noeud possède 3 degrés de liberté :
- les 3 composantes de son déplacement dans l'espace.

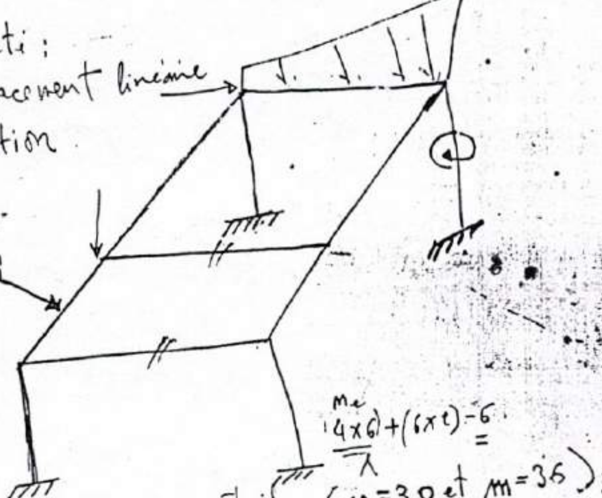
Les efforts intérieurs sont du type N seulement

F. Structures spatiales

Ce sont les structures les plus générales, fig (9.6)

un noeud possède 6 degrés de liberté :
- les 3 composantes de son déplacement linéaire
- les 3 " de sa rotation

Dans une section d'une barre, on rencontre les six efforts intérieurs :
- un effort normal
- deux efforts tranchants
- un moment de torsion
- deux moments de flexion



Me $(4\times6)+(6\times1)-6 = 30$

structure spatiale ($M=30$ et $m=36$) $\wedge$ 6×6

fig (9.6)

9.2. [Remarques et rappel.]

[— On entend par <u>barre</u>, un élément de structure dont l'une de dimensions est beaucoup plus grande que les deux autres. On peut ainsi lui appliquer les résultats de la Résistance des Matériaux. Où une barre est assimilable à son axe ; toutes les grandeurs (efforts intérieurs & déplacements) ne dépendent en effet que d'une coordonnée, celle mesurée selon son axe.]

[— Dans le cas général d'une barre de l'espace, les dits résultats (si la section transversale a deux axes ⊥ de symétrie (A.P.I)) n'appliquent en toute rigueur que si [càd les efforts tranchants passent par G. (centre de gravité)]. Sinon les résultats qui suivent seront approximatifs. Pour une structure plane, chargée dans son plan, un seul axe de ÷ is explan...

Pour une structure plane, chargée dans son plan, un seul axe de ⊥ à ce plan suffit.

9.3. Conventions de signes ; Systèmes de coordonnées

[Dans la méthode des déplacements, il faut choisir une convention de signes unique pour toutes les grandeurs du type force et déplacement.] Etant donné un système d'axes cartésiens $oxyz$, fig (9.7), toute composante suivant un axe d'une grandeur (force extérieure ou intérieure, moment, coefficient k_{ij} et k_{ip}, déplacement linéaire, rotation, etc...) est positive si elle agit dans la direction positive de l'axe ; pour les rotations et moments, on applique la règle du tire-bouchon (ou de la main droite et du pouce), fig (9.7).

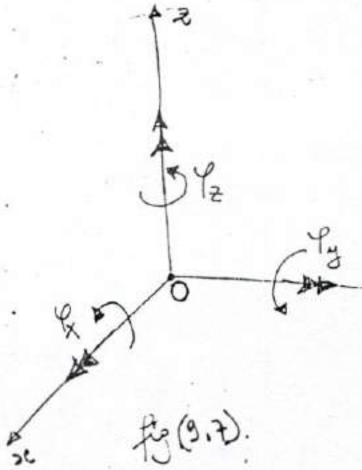
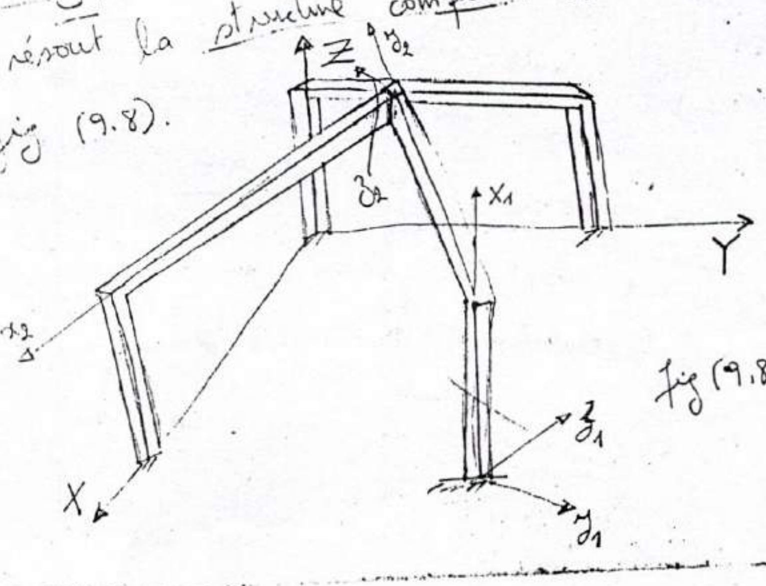


fig (9.7).

On appelle système de coordonnées local un système d'axes attaché à une barre, de telle sorte que l'axe x coïncide avec l'axe de la barre, et que les axes y et z coïncident avec les axes principaux d'inertie de la section.

On appelle système de coordonnées global (ou absolu) le système d'axes attaché à la structure complète. Il est unique, choisi arbitrairement, et c'est par rapport à lui que l'on calcule les inconnues cinématiques D_j, les coefficients k_{ij} et les termes constants $(P_i - k_{ip})$ lorsqu'on résout la structure complète. On le désigne par les majuscules X, Y, Z ; fig (9.8).



X, Y, Z : système global.

x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 } systèmes locaux.

fig (9.8).

Visa

Avant d'aborder la résolution d'une structure complète, il faut étudier le comportement des éléments constitutifs de cette structure, càd des barres prises isolément.

9.4. Matrices de rigidité des barres

9.4.1. Généralités et rappels

Dans ce §, on va déterminer la valeur explicite des coefficients de rigidité k_{ij} pour plusieurs types de barres, qui ont les caractéristiques suivantes :

- la barre est droite de longueur L
- ses caractéristiques A ($\sim\Omega$), J, I_y, I_z, E et G sont constantes sur L ($GJ = C$) ;
- La déformation due à l'effort tranchant est négligée.

On sait que, revoir chapitre 5, [qu'un k_{ij} est une réaction produite au blocage i par un déplacement unité du blocage j. Lorsqu'on étudie les barres isolément, seules leurs extrémités sont bloquées et peuvent subir des déplacements unités. Par conséquent] les coefficients de rigidités des barres sont les forces qui s'exercent aux extrémités des barres ~~et~~ sur ces extrémités (et non sur les appuis), et qui maintiennent une barre en équilibre lorsque l'une de ses extrémités subit un certain déplacement unité.

9.4.2. Barre de l'espace, bi-encastrée, dans des axes locaux

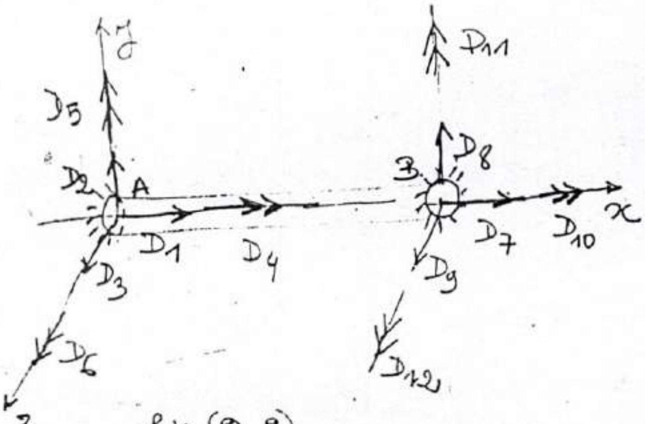


fig (9.9).

Soit AB cette barre, fig (9.9).
Chacun de ses noeuds A et B peut subir 6 déplacements :
$D_1, \dots, D_6$ pour A et $D_7, \dots, D_{12}$ pr B.
*
Pour chacun de ces déplacements de valeur unitaire, il naît 6 réactions à chaque extrémité de la barre, qui sont les coefficients de rigidité :

$k_{i1}, \dots, k_{i12}$, $i = 1, \dots, 6$ en A et $k_{i,1}, \dots, k_{i,12}$; $i = 7, \dots, 12$ en B.
La matrice de rigidité $[k]$ de la barre étudiée :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,12} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \dots\ k_{12,12} \\ k_{12,1} & \dots & & \end{bmatrix} \quad \text{où } k_{ij} = k_{ji} .$$

Soit p. ex.
[a)] $D_1 = 1$, fig (9.10)
Ce déplacement ne produit qu'un effort normal N et la déformation correspondante. Les deux seuls coefficients k_{i1} non nuls sont sur la fig (9.10). On voit que $k_{11} > 0$, $k_{71} < 0$ et $k_{11} = |k_{7,1}|$.

Verso →

* Ces déplacements sont définis dans l'ordre indiqué sur la figure c.à.d. – d'abord au noeud origine (A), puis à l'autre (B) ;
– d'abord les translations, puis les rotations ;
– d'abord sur x, puis sur y, enfin sur z.
Cet ordre conventionnel, pour les forces et les déplacements n'a de sens que dans l'étude des barres isolées.

l'expression de k_{11} (formule (5.1)) est :

$$k_{11} = \int_0^L EA \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

avec $u = 1 - \frac{x}{L}$, et $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{L}$, on a :

$$k_{11} = \int_0^L EA \frac{1}{L^2}\, dx = \frac{EA}{L}$$

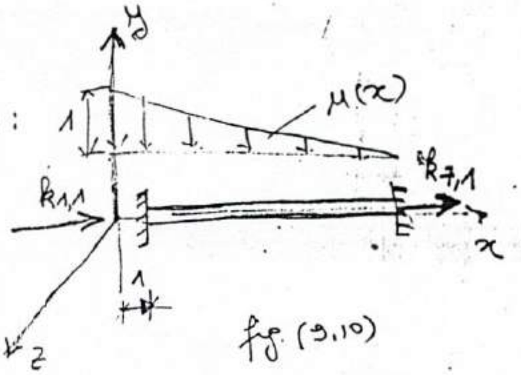


fig (9.10)

b) $D_2 = 1$, fig. (9.11).

ce déplacement produit une flexion plane dans xy. La figure montre les $k_{i,2}$ non nuls. Par la Résistance des Matériaux, on trouve que :

$$k_{2,2} = \frac{12\, EI_z}{L^3} = -k_{8,2}$$

$$k_{6,2} = k_{12,2} = \frac{6\, EI_z}{L^2}$$

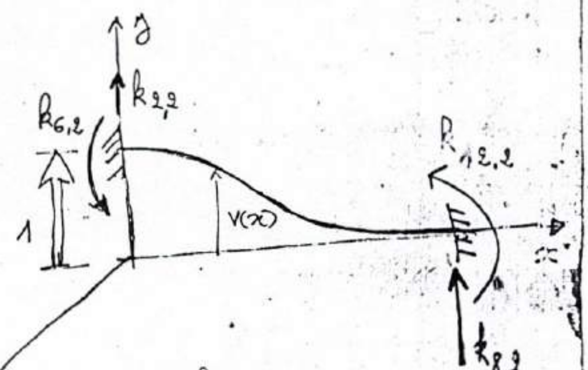


fig (9.11)

c) $D_6 = 1$. fig (9.12).

Ici on trouve :

$$k_{2,6} = -k_{8,6} = \frac{6\, EI_z}{L^2}$$

$$k_{6,6} = \frac{4\, EI_z}{L} \; ; \quad k_{12,6} = \frac{2\, EI_z}{L}$$

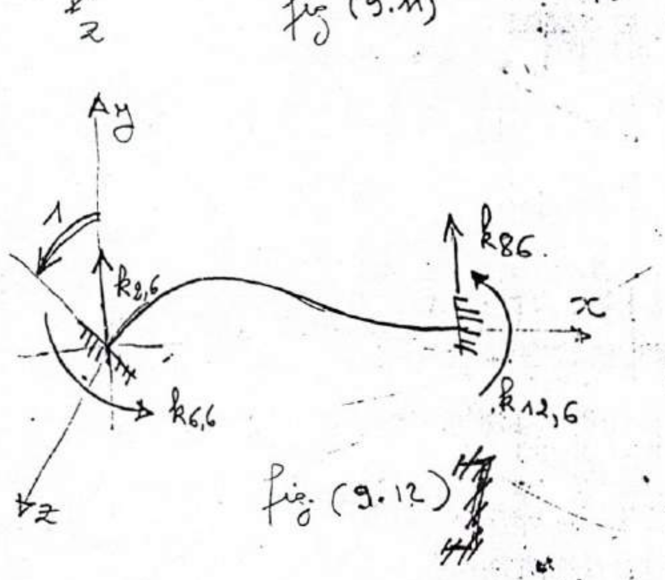


fig (9.12)

La Table 1, en annexe, donne l'ensemble des coefficients k_{ij} du cas traité. Nous ne donnons pas les valeurs des k_{ij} dans le système d'axes global car trop compliqué pour un calcul manuel. Le cas présenté permet de résoudre des structures à mailles rectangulaires seulement (car axes locaux // aux axes globaux).

9.4.3. Autres cas.

Voir les annexes. Pour les structures du type A, C, D et F, on a donné les matrices de rigidité de la barre bi-encastrée, et pour les struct. du type B et E (celles de la barre) bi-articulée. Pour les structures planes du type A et C ((cas courants)), on a donné également la matrice de la barre encastrée - appuyée, qui est utile en présence d'articulation *.

Les matrices de rigidité sont données en axes locaux pour tous les types de structures et en axes globaux pour les types B.C, D et E.

9.4.4. Vecteurs des charges extérieures des barres

Il s'agit de trouver la valeur explicite des coefficients k_{ip} pour divers types de barres et pour divers cas de charge.

[Ce problème est identique à celui traité au § 9.4.2 ; par conséquent] le plus simple est d'utiliser les résultats obtenus en Résistance des Matériaux puisque k_{ip} est, par définition, une réaction appui.

Exemple : la barre bi-encastrée de la fig. (9.13) qui, p. ex, fait partie d'une structure plane chargée dans son plan (x, y), les 6 coefficients k_{ip} produit par la P sont :

$k_{1p} = 0$; $k_{2p} = -Pb^2(L+2a)/L^3$

$k_{3p} = -Pab^2/L^2$; $k_{4p} = 0$

$k_{5p} = -Pa^2(L+2b)/L^3$

$k_{6p} = Pa^2b/L^2$

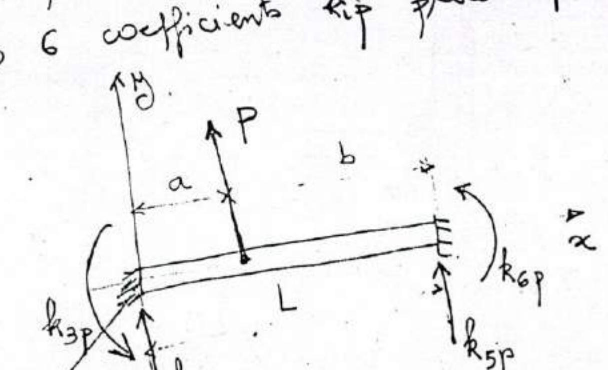
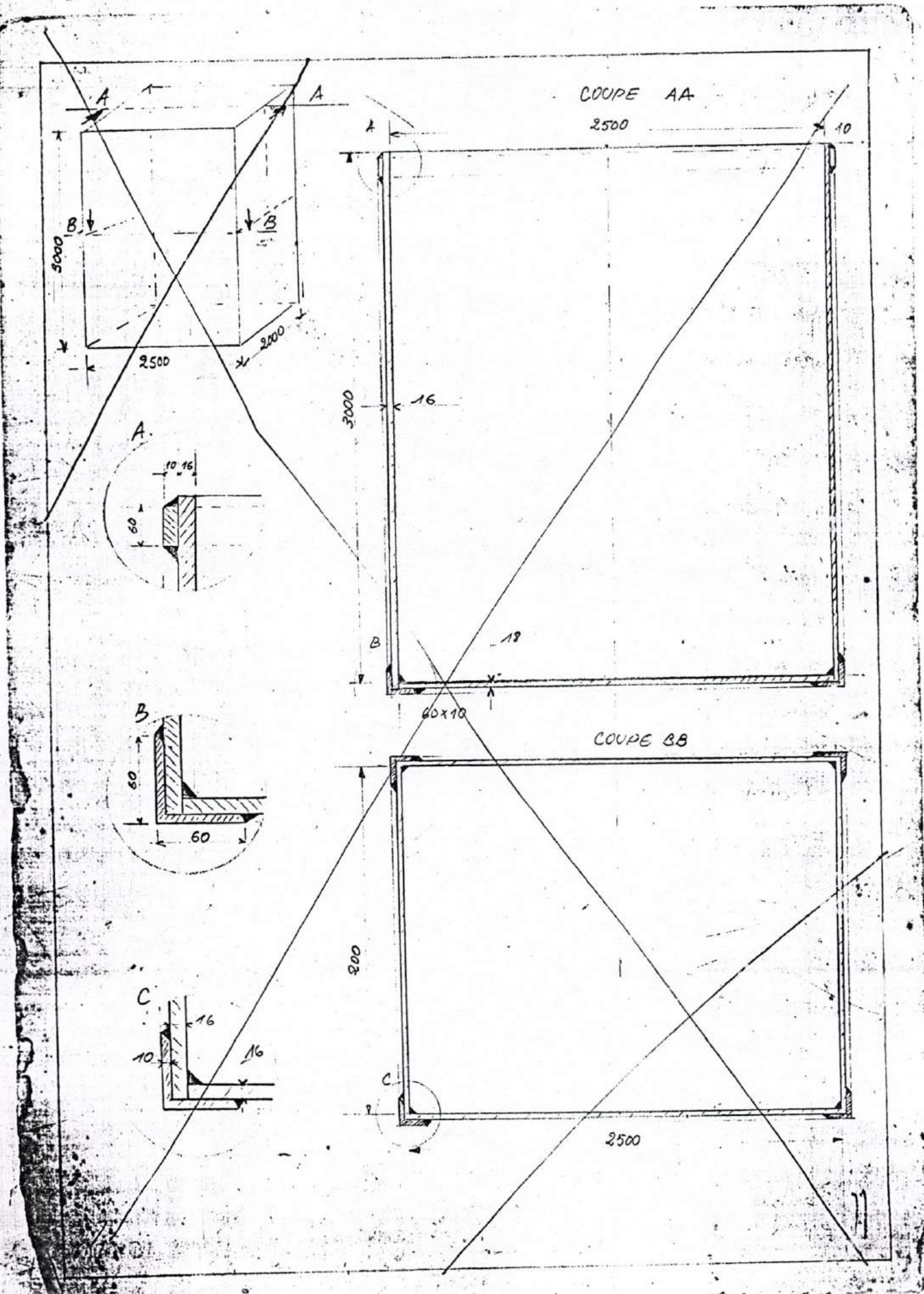


fig (9.13)

* l'avantage de la barre encastrée-appuyée est de diminuer le nombre d'inconnues cinématiques, car il n'est plus nécessaire de prendre l'angle de rotation de l'extrémité appuyée comme inconnue

ex. $\longrightarrow$ C_0 : D_1 D_2 D_3


COUPE AA
COUPE BB
A
B
C
3000
2500
2000
10
16
18
60
60x10
10 16
200
2500

On trouvera en Annexe (table 8) certaines valeurs de k_{ip} en axes locaux pour les poutres appartenant aux structures des types A et C. Ces coefficients sont présentés sous forme de matrices-colonne ou vecteurs $\{k_p\} = \{k_{1,p}, k_{2p}, \dots\}^{-1}$, appelés vecteurs des charges extérieures. Notons que pour les structures en treillis (types B et E), $k_{ip} = 0$ si les charges sont bien appliquées aux noeuds. Pour les autres cas, le lecteur les établira lui-même par la méthode des forces par ex.

Rm

- comme les k_{ij}, les k_{ip} s'exercent sur les extrémités des barres.
- Les coefficients k_{ip} précédemment définis ne s'appliquent qu'aux barres isolées.

9.4.5. Relations forces-déplacements d'une barre

[Une barre AB comporte $m_A \leq 6$ et $m_B \leq 6$ degrés de liberté aux noeuds A et B respectivement. Si l'on connait les m ($= m_A + m_B$) déplacements des deux extrémités A et B et la sollicitation extérieure agissant sur la barre, on peut trouver tous les efforts intérieurs [Nous allons établir la relation générale qui donne les composantes des efforts intérieurs F aux deux extrémités d'une barre en fonction de déplacements de ces deux extrémités et des charges extérieures.]]

Remarquons [tout d'abord] que :

- si, à l'extrémité A (ou B) d'une barre, il y a m_A (ou m_B) déplacements possibles, il y a aussi m_A (ou m_B) efforts intérieurs;
- si l'on donne un déplacement unité déterminé à l'une des extrémités d'une barre, il naît aux deux extrémités ($m_A + m_B$) forces qui sont les coefficients de rigidité k_{ij}

verso

de cette barre. Si la barre est étudiée dans ses axes (axes locaux), ces forces coïncident avec les efforts intérieurs agissant sur les extrémités de la barre, fig (9-14); mais si la barre du plan est étudiée dans un système d'axes globaux, ces forces sont les composantes des efforts intérieurs, dans le système d'axes global, fig (9.15), de sorte qu'il faut les composer dans le système local pour obtenir les efforts intérieurs habituels $N, T_y, T_z, M_t, M_y, M_z$. Il en est de même si la barre est chargée de forces extérieures.

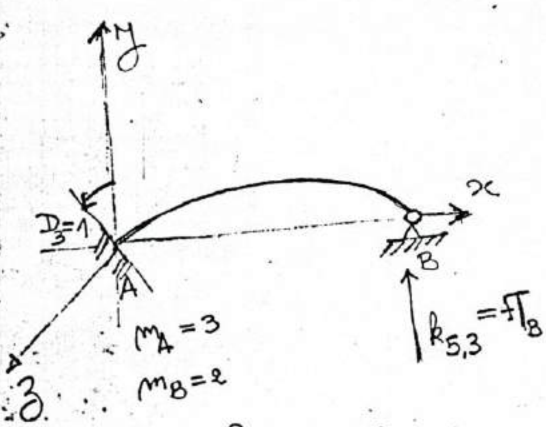
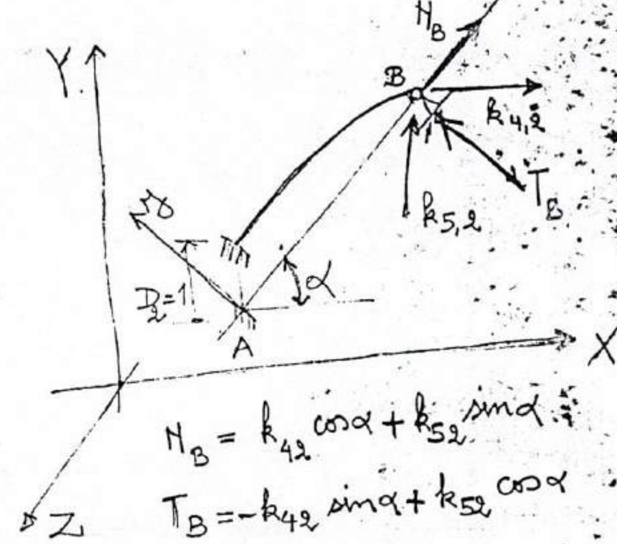


fig (9.14)



$N_B = k_{42}\cos\alpha + k_{52}\sin\alpha$

$T_B = -k_{42}\sin\alpha + k_{52}\cos\alpha$

fig (9.15)

Cela étant, si D_j (avec $j \le 12$) sont les déplacements, pris dans l'ordre conventionnel, aux deux extrémités d'une barre isolée, une quelconque force intérieure F_i aux dites extrémités est donnée par

$$F_i = k_{ij} D_j + k_{ip} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, 12 \text{ max} \\ i = \quad " \quad\quad " \end{pmatrix}$$

en vertu du principe de superposition.

Tous les F_i peuvent se calculer simultanément, en les regroupant dans un vecteur $\{F\}$ dans le même ordre que les déplacements.

On a matriciellement : $\{F\} = [k]\{D_b\} + \{k_p\}$ (9.1)

où l'indice "b" sert à rappeler que (9.1) s'applique à une barre isolée.

9.5. Calcul d'une structure par la méthode des déplacements

9.5.1. Rappel

Après le calcul des k_{ij} et k_{ip} des barres isolées dans le syst. d'ax. global, on passe à l'analyse de la structure complète. La structure à étudier par la méthode des déplacements est placée dans un système d'axes absolu XYZ. Soit C_0 la structure cinématiquement déterminée de référence correspondante, obtenue par m blocages simples des noeuds où l'on a choisi les m inconnues cinématiques D_j, parallèlement aux axes XYZ. On a établi au § 5.2. le système d'équations linéaires suivant, permettant de calculer les m inconnues D_j :

$$\left.\begin{array}{l}
k_{1,1} D_1 + k_{1,2} D_2 + k_{1,3} D_3 + \dots \dots + k_{1,m} D_m + k_{1,p} = P_1 \\
k_{2,1} D_1 + k_{2,2} D_2 + k_{2,3} D_3 + \dots \dots + k_{2,m} D_m + k_{2,p} = P_2 \\
\dots \qquad \dots \\
k_{3,1} D_1 + \dots \\
\dots \qquad + k_{mm} D_m + k_{mp} = P_m \\
k_{m,1} D_1 + k_{m2} D_2 + \dots
\end{array}\right\} (9.2)$$

Les membres de gauche de (9.2) représentent les résultantes des forces agissant sur les extrémités des barres (et non sur les noeuds), alors que les membres de droite (P_i) sont des forces extérieures directement appliquées aux noeuds, fig (9.16).

En vertu du principe de l'action et de la réaction, l'équation d'équilibre d'un noeud est :

$$-(k_{ij} D_j + k_{ip}) + P_i = 0$$

ce qui est le système (9.2)

fig (9.16) : Equilibre d'un noeud selon X

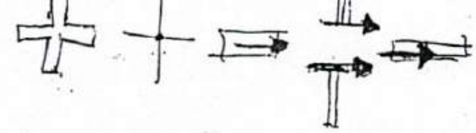
verso

9.5.2. Calcul des coefficients k_{ij} de la structure

Dans l'expression (5.1) d'un k_{ij} *, ~~les limites d'intégration n'ont pas été précisées~~; l'intégration s'étend à toutes les barres touchées *simultanément* par les déplacements $D_i = 1$ et $D_j = 1$. Il en résulte que :

a.- k_{ij} (structure) $= \sum k_{ij}$ (barres) (9.3.)

La réaction produite au blocage i par $D_j = 1$ est égale à la somme des réactions de chaque barre *aboutissant* au noeud où a lieu le blocage i.



selon i

b.- Un coefficient k_{ii} est toujours positif

c.- Si les *noeuds* où sont choisies les inconnues, D_i et D_j sont différents et ne sont reliés entre eux par aucune barre, $k_{ij} = 0$.

9.5.3. Calcul des coefficients k_{ip} et P_i

Par un raisonnement analogue,

$$k_{ip} \text{ (structure)} = \sum k_{ip} \text{ (barres)} \qquad (9.4)$$

Les P_i sont les composantes dans XYZ, des charges *concentrées* agissant directement aux noeuds de la structure où l'on a choisi des inconnues D_j. Elles sont une donnée du problème, donc connues.

$$* \; k_{ij} = \int_0^s EI \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_i \left(\frac{d\phi}{ds}\right)_j ds + \int_0^s EA \left(\frac{du}{ds}\right)_i \left(\frac{du}{ds}\right)_j ds + \int_0^s GA' \left(\frac{dv}{ds}\right)_i \left(\frac{dv}{ds}\right)_j ds$$

où $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_i$, … déformat. virtuelles dues à $D_i = 1$ et $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)_j$, … déf. réelles dues à $D_j = 1$

9.5.4. Valeurs (Calcul) des k_{ij} et k_{ip} par l'emploi de tableaux

[Si les caractéristiques E, G, A (noté parfois Ω), I_y, I_z et J sont constantes le long de chaque barre de E_0, tout en pouvant varier d'une barre à l'autre, les coefficients intervenant à droite des égalités (9.3) et (9.4) sont] les coefficients k_{ij} ou k_{ip} composant les matrices de rigidité ou vecteurs des charges extérieures des barres, donnés en annexes.

9.5.5 Solution du problème de structure globale

Connaissant les k_{ij}, k_{ip} et P_i de la struct. globale on obtient les déplacements D_j des noeuds de la structure par la résolution du système (9.2).

Pour trouver les efforts intérieurs (ou leurs composantes), il faut appliquer la relation (9.1) à chaque barre successivement. Le vecteur $\{D_b\}$ de cette relation représente, rappelons-le, les déplacements des deux extrémités de la barre, connus par la résolution de (9.2), et pris dans (9.1) dans un ordre conventionnel qui n'a rien à voir avec l'ordre dans lequel on a choisi les inconnues D_j de la structure. La connaissance des forces aux extrémités de chaque barre détermine entièrement la distribution des efforts internes dans toute la structure.

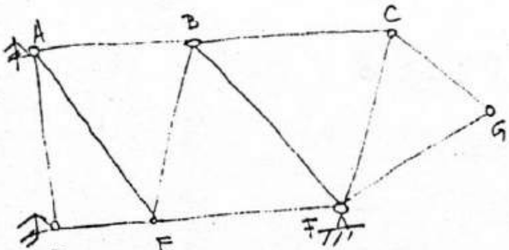
9.6 Critère pour la numérotation des inconnues cinématiques.

Règle : "Il faut numéroter les inconnues cinématiques de telle sorte que la différence $|i-j|$ entre les indices de deux

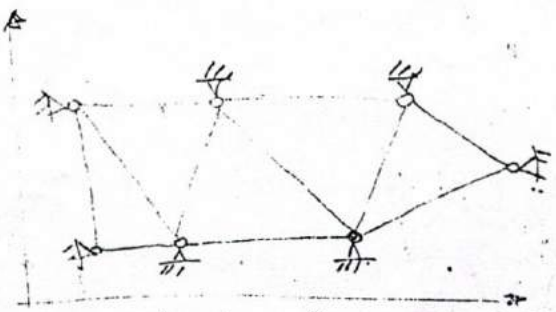
verso →

déplacements d'une même barre soit aussi petite que possible".

Considérons, p. ex., la structure plane triangulée de la fig (9.17) qui comporte 8 inconnues cinématiques (déplacements horizontaux et verticaux des 4 noeuds B, C, E, G).

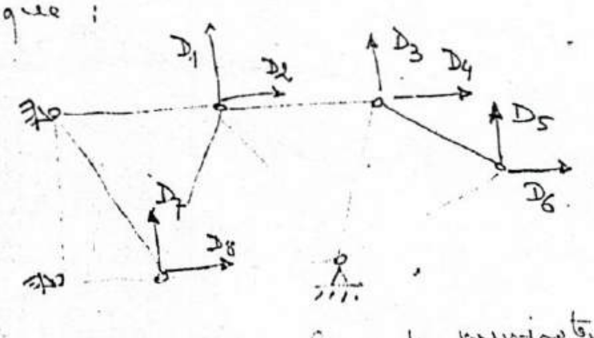


structure à étudier
fig (9.17).



structure Co : m = 8.

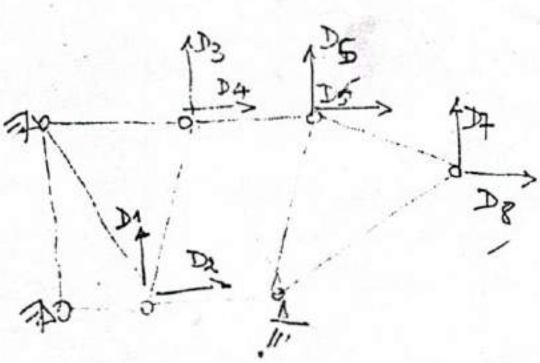
montrer que :



$$\Longrightarrow [k] = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

première façon de numéroter

résolution longue du système d'équations qui en résultent.



$$\Longrightarrow [k] = \begin{bmatrix} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

matrice bande → résolution facile du système d'équations résultant

23/6/88
2h

Chapitre 10 : Méthode des Rotations.

10.1. Généralités

La méthode des rotations et celle de "Cross", chapitre 11, sont des applications de la méthode des déplacements aux structures des types A et C, § 9.1, où l'on néglige les déformations dues à N et T.

[Ne peuvent donc pas être étudiées par les dites méthodes, les structures comportant des éléments où la déformation due à N joue un rôle important (treillis, arcs surbaissés, tirants, haubans, etc...)]

10.2. Structures à noeuds fixes et à noeuds mobiles

. On peut démontrer que tout point C relié par deux barres AC et BC à deux points fixes A et B est lui-même un point fixe, fig (10.1)

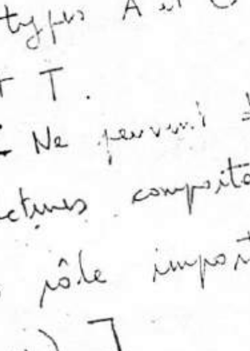


fig (10.1)

[Pour ce, on démontre que la variation de longueur de la corde d'une barre par suite de sa courbure (due à la flexion) est négligeable vis-à-vis de sa variation de longueur sous l'effet de l'effort normal. D'autre part, comme on l'a dit au § 10.1, les déformations dues à N (et T) sont négligeables dans toutes les structures étudiées aux ch. 10 et 11.

Par conséquent la variation totale de longueur de la corde d'une barre est négligeable] Le point C de la figure (10.1) est donc un point fixe. Les considérations précédentes sont générales et valables aussi au cas où on résout une structure par la méthode des forces]

Ainsi, nous pouvons distinguer, au point de vue des déplacements des noeuds (extrémités des barres), deux catégories de structures :

a.- Les structures à noeuds fixes sont celles dont les noeuds occupent des positions invariables dans le plan, mais peuvent tourner librement autour de ces positions. Pour déterminer si une structure est à noeuds fixes, il suffit d'examiner de proche en proche si chacun de ses noeuds est bien relié à deux points fixes, comme les structures de la fig (10.2).

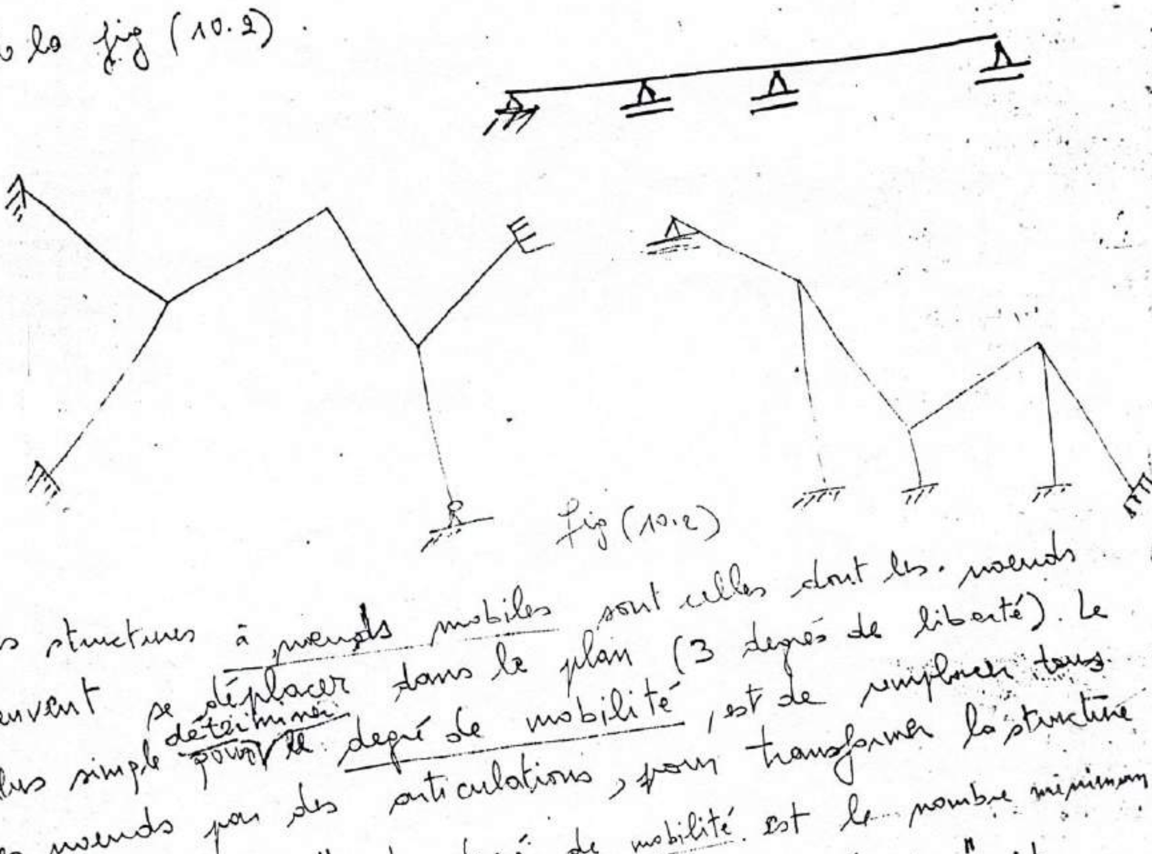


fig (10.2)

b.- Les structures à noeuds mobiles sont celles dont les noeuds peuvent se déplacer dans le plan (3 degrés de liberté). Le plus simple pour déterminer le degré de mobilité, est de remplacer tous les noeuds par des articulations, pour transformer la structure en une "chaîne". Le degré de mobilité est le nombre minimum de blocages simples à introduire pour que la "chaîne" soit stable dans son plan. Les structures suivantes sont à noeuds mobiles, fig (10,3).

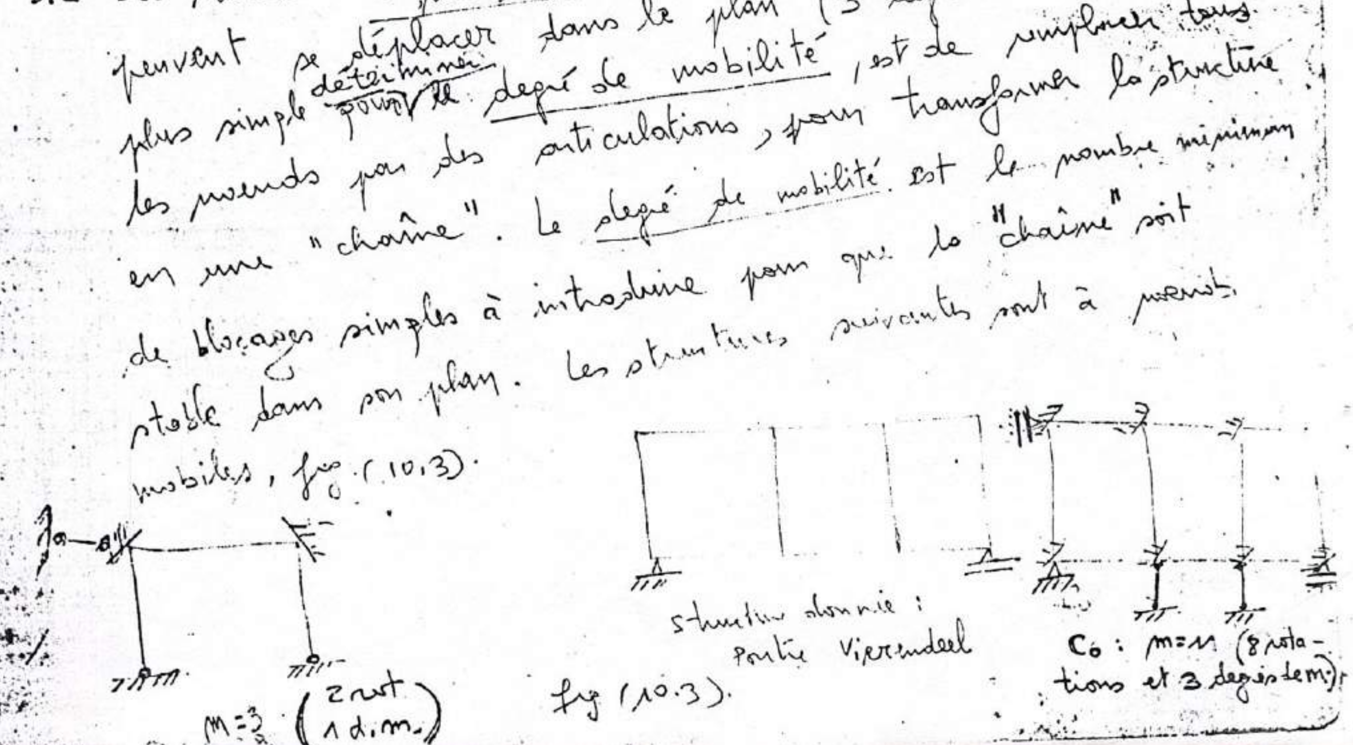


fig (10.3).

<u>Remarque</u> : Certaines structures symétriques à noeuds mobiles se comportent comme des structures à noeuds fixes si elles sont chargées symétriquement. Voir p. ex. fig. (10.4). De telles structures sont dites pseudo-fixes.

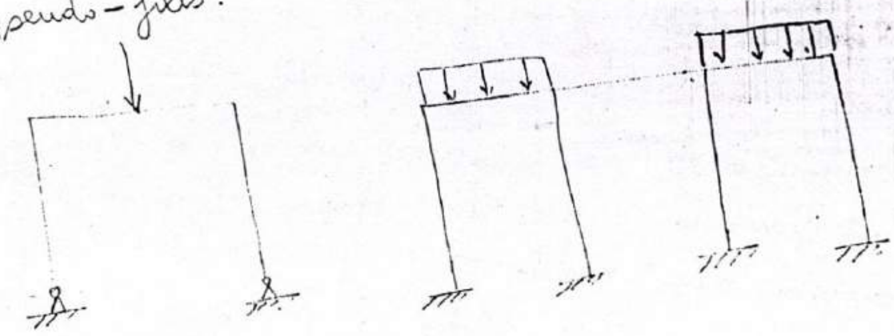


fig (10.4).

Exercice : Déterminez la catégorie de chacune des structures suivantes.

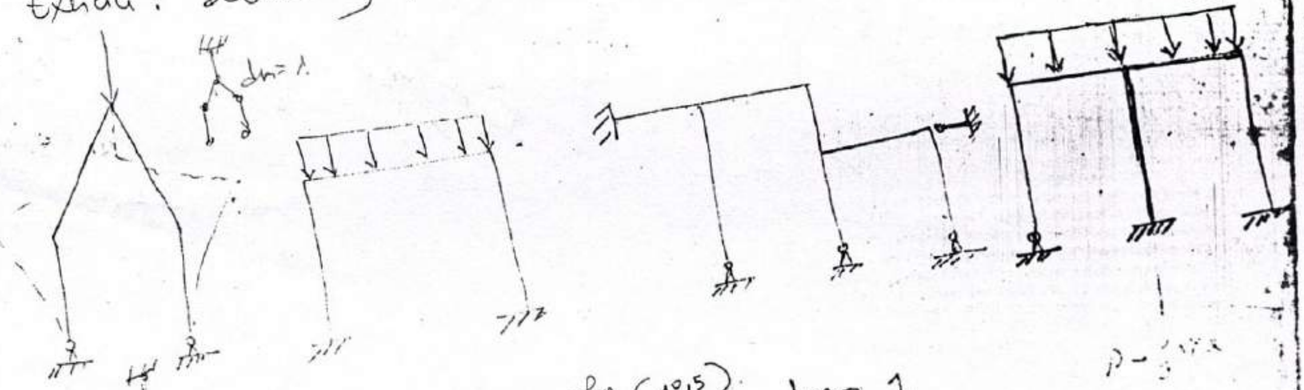
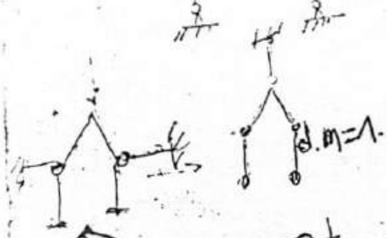


fig (10.5). dm = 1



10.3. <u>Structures à noeuds fixes</u>

10.3.1. <u>Inconnues cinématiques</u>

Soit par exemple le portique de la fig. (10.6) où les barres prismatiques ~~rectilignes~~ [sont assemblées les unes aux autres au droit des noeuds. Ces derniers n'ont qu'un seul degré de liberté], les inconnues cinématiques seront donc les angles de rotation des noeuds. ~~qui peuvent tourner~~ Comme elles sont portées par l'axe Z, il n'est pas nécessaire de distinguer

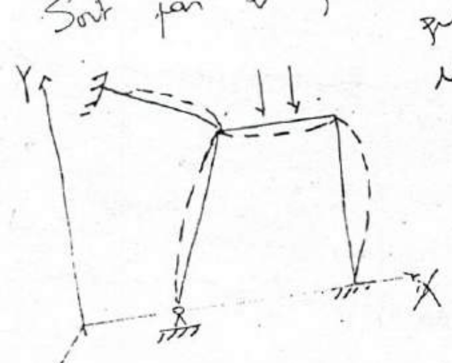


fig (10.6).

le système d'axe global et local dans le calcul des grandeurs relatives aux inconnues (rotations et moments), puisque z est // à Z. Les inconnues (les rotations) sont désignées par D_j comme précédemment, mais dans la méthode des rotations classique et dans celle de Cross, elles sont généralement notées φ_j.

10.3.2. Matrices [k] et vecteurs $\{k_p\}$ des barres

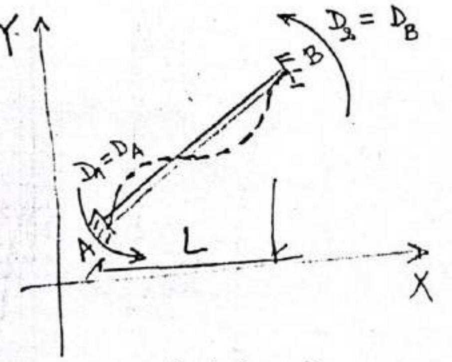


fig (10.7)

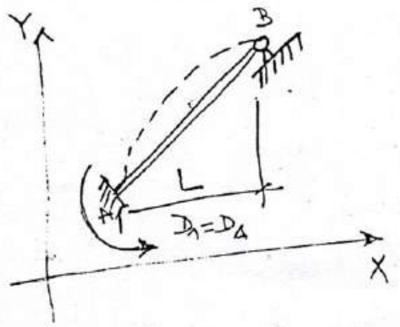


fig (10.8)

La matrice de rigidité d'une barre bi-encastrée AB dont on ne considère que la rotation des extrémités est (table 4, cas II.A, fig (10.7)):

$$[k] = \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

La quantité $R = 2EI/L$ s'appelle par définition raideur de la barre.

La matrice de rigidité d'une barre encastrée-appuyée est (Table 4, cas II.B, fig (10.8)):

$$[k] = k_{11} = 3EI/L = 3R/2 \quad (10.2)$$

Les vecteurs des charges extérieures entre noeuds ont deux composantes, les moments d'encastrement parfait développés aux extrémités des barres par les sollicitations extérieures, cas de la fig (10.7). Dans le cas d'une poutre encastrée-appuyée, il n'y a qu'une composante. Ces composantes sont les coefficients k_{3p} et k_{4p} de la Table 8, cas A et k_{3p}, table 8, cas B, respectivement. On appellera k_{Ap} et k_{Bp} ces moments qui sont appelés en notation classique m_A et m_B.

10.3.3. Relation forces - déplacements

Les forces agissant sur les extrémités de la barre bi-encastrée AB sont ici des moments fléchissants M_A et M_B ; si D_A et D_B sont les rotations des extrémités de cette barre, on a, système (9.1) :

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} D_A \\ D_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_{Ap} \\ k_{Bp} \end{Bmatrix} \qquad (10.3\,a)$$

et en notation classique :

$$\left.\begin{aligned} M_A &= R\,(2\varphi_A + \varphi_B) + m_A \\ M_B &= R\,(\varphi_A + 2\varphi_B) + m_B \end{aligned}\right\} \qquad (10.3\,b)$$

Pour une barre encastrée - appuyée, on a :

$$M_A = (3\,EI/L)\,D_A + k_{Ap} \qquad (10.4\,a)$$

ou en notat. classique : $M_A = (3\,R/2)\,\varphi_A + m_A$ (10.4 b)

10.3.4. Efforts intérieurs

Une fois les moments connus, on trouve les efforts tranchants, les efforts normaux et les réactions d'appui par la statique, en faisant l'équilibre des barres, des nœuds, de fragments de structure ou de la structure complète. Pour ce, afin de trouver les valeurs avec signes de la méthode des déplacements, on fera attention qd à la façon d'introduire les efforts intérieurs positifs au droit des coupes, voir fig (10.9).

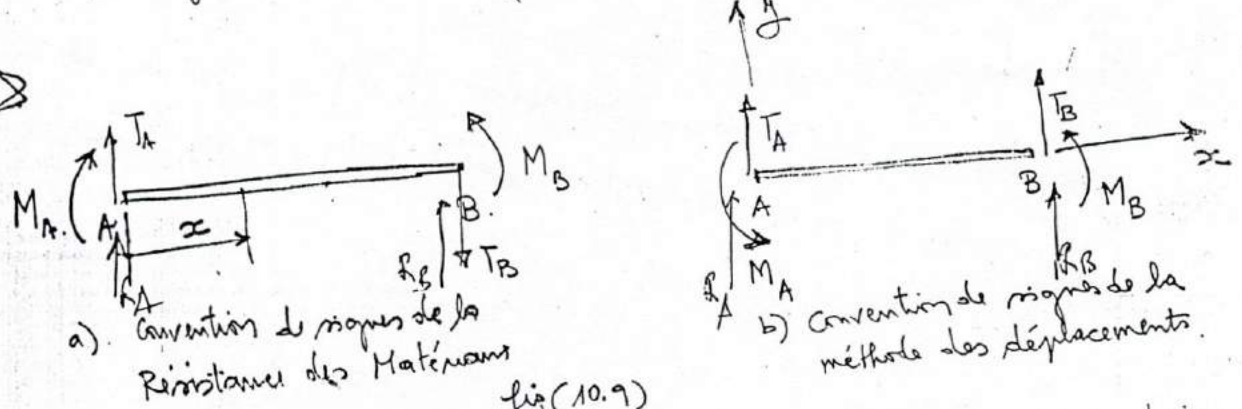


fig (10.9)

Rm. Dans le cas de la détermination des efforts normaux, certains cas d'indétermination peuvent apparaître, du fait que l'on néglige la déformation due à l'effort normal.

10.3.5. Remarque au sujet des coefficients k_{ij} de la structure

Dans une structure à noeuds fixes, k_{ii} et k_{ij} sont toujours positifs. Soit un noeud d'une telle structure où aboutissent "b" barres du type bi-encastré et "a" du type encastré-appuyé. Soit i le blocage simple en ce noeud. Dans la "i"ème équation d'équilibre (9.2), on a :

$$k_{ii}\ (\text{structure}) = \sum k_{ii}\ (\text{barres}) = \sum_a (3EI/L) + \sum_b (4EI/L)$$

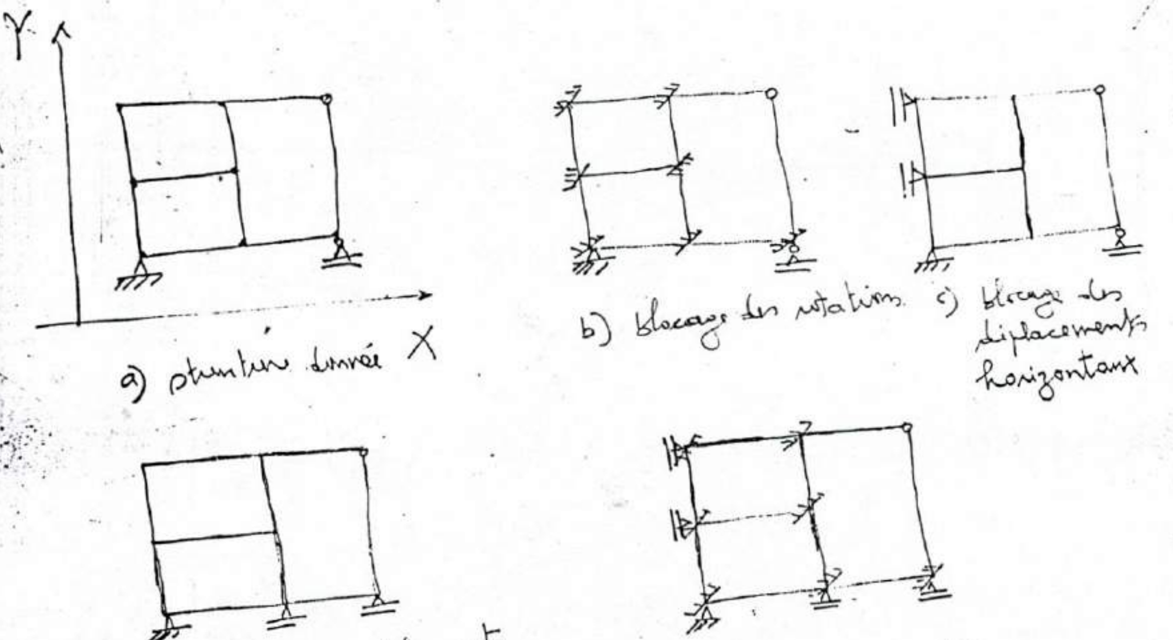
$$k_{ij}\ (\text{structure}) = k_{ij}\ (\text{barre}) = \begin{cases} 2EI/L & (\text{barre bi-encastrée}). \\ 0 & (\text{" encastrée-articulée}) \end{cases}$$

10.4. Structures à noeuds mobiles et à mailles rectangulaires.

4/6/88 2h

10.4.1. Inconnues cinématiques

La structure à noeuds mobiles et à mailles rectangulaires est placée dans un système d'axes (XY) parallèles aux axes des barres, fig. (10.10).



a) structure donnée

b) blocage des rotations

c) blocage des déplacements horizontaux

d) blocage des déplacements verticaux

e) C₀ : m = 10

Fig (10.10)

La structure de référence C_0, fig. (10.10 e) est obtenue :

[a.- en bloquant la rotation de tous les noeuds fig (10.10 b),

b.- " le déplacement horizontal des files de barres horizontales, fig (10.10 c)

c.- en bloquant le déplacement des barres verticales, fig (10.10 d).]

10.4.2: Matrices [k] et vecteurs $\{k_p\}$ des barres

Comme les barres ne changent pas de longueur, on ne ~~fig~~ pas besoin de se préoccuper du déplacement axial de leurs extrémités. Dès lors, les extrémités d'une barre faisant partie d'une structure à maille rectangulaire peuvent subir des rotations et des translations perpendiculaires à l'axe de la barre. Par conséquent, les matrices [k] d'une barre horizontale biencastrée ou encastrée-appuyée, sont respectivement les suivantes (table 4, cas I A et cas I B respectivement fig. (10.11) et (10.12)):

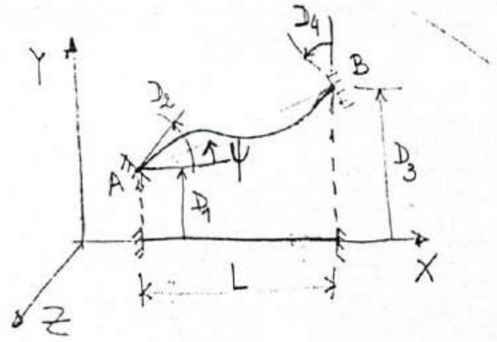


fig (10.11)

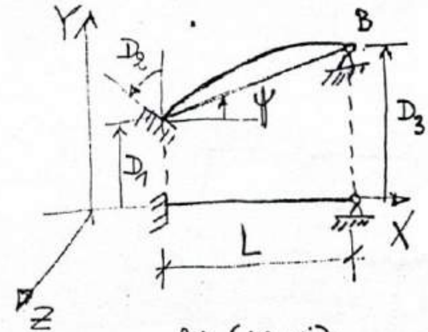


fig (10.12)

$$[k] = \frac{2EI}{L^3}\begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad , \quad [k] = \frac{3EI}{L^3}\begin{bmatrix} 1 & L & -1 \\ L & L^2 & -L \\ -1 & -L & 1 \end{bmatrix} \qquad (10.5) \text{ et } (10.6)$$

On appelle <u>déviation</u> de la barre, et on note ψ "psi", l'angle entre la corde de la position déformée de la barre et sa position initiale. Voir fig. (10.11) et (10.12), $\psi = (D_3 - D_1)/L$. Ce déplacement du type rotation peut être choisi comme inconnue à la place des translations horizontales et verticales, de sorte qu'il n'y a plus que des inconnues cinématiques d'un seul type, les rotations, ce qui justifie le nom de la méthode pour les structures à noeuds mobiles.

Les vecteurs $\{k_p\}$ ont 4 ou 3 composantes correspondant aux déplacements D_1 à D_4 ou D_1 à D_3 selon que la barre soit biencastrée ou encastrée - appuyée. Ces composantes sont les efforts tranchants et moments d'encastrement produits aux extrémités des barres par la sollicitation extérieure (entre noeuds). Ils sont donnés par les coefficients k_{2p}, k_{3p}, k_{5p} et k_{6p}, et par k_{2p}, k_{3p} et k_{5p}, respect. des vecteurs $\{k_p\}$ de la table 8).

On adapte facilement les matrices [k] et vecteurs {k_p} au cas de la barre verticale. Pour [k], on trouve, fig(10.13) et fig(10.14) :

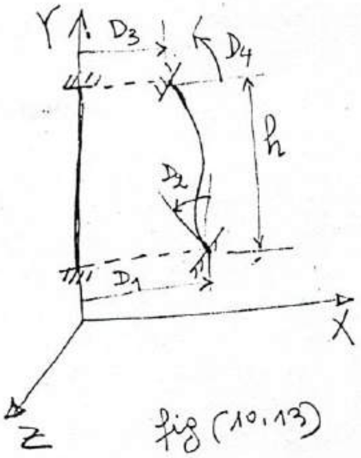


fig (10.13)

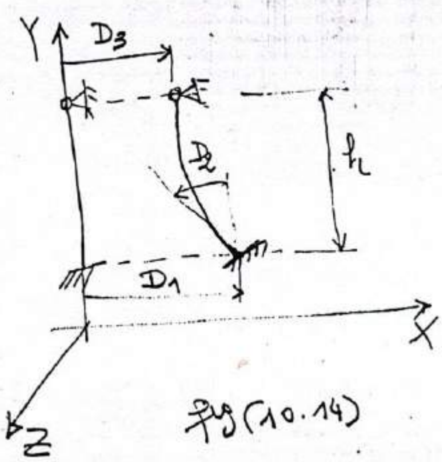


fig (10.14)

$$[k] = \frac{2EI}{h^3}\begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} , \quad [k] = \frac{3EI}{h^3}\begin{bmatrix} 1 & -h & -1 \\ -h & h^2 & h \\ -1 & h & 1 \end{bmatrix}$$
(10.7)
(10.8)

Pour les barres verticales, on a $\psi = (D_1 - D_3)/h$

10.4.3. Relation force - déplacement et efforts intérieurs

Les forces agissant sur les extrémités A et B des barres et associées aux déplacements D_1 à D_4 ou D_1 à D_3 selon les cas ; sont les efforts intérieurs M et T aux extrémités A et B de la barre, de sorte que le système (9.1) s'écrit ici :

$$\begin{Bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \\ M_B \end{Bmatrix} = [k]\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} + \{k_p\} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \end{Bmatrix} = [k]\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} + \{k_p\}$$
(10.9)
(10.10)

selon qu'il s'agisse d'une barre bi-encastrée ou encastrée - appuyée.

– [Les formules correspondantes de la théorie classique s'obtiennent à partir de (10.9) et (10.10) en introduisant $\psi = (D_3 - D_1)/L$.

On trouve ainsi :

a). barre bi-encastrée :

$$\left.\begin{aligned} M_A &= R\,(2\varphi_A + \varphi_B - 3\psi) + m_A \\ M_B &= R\,(2\varphi_B + \varphi_A - 3\psi) + m_B \\ T_A &= (3R/L)(\varphi_A + \varphi_B - 2\psi) + t_A \\ T_B &= -(3R/L)(\varphi_A + \varphi_B - 2\psi) + t_B \end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

b). barre encastrée – appuyée

$$\left.\begin{aligned} M_A &= (3R/2)\,(\varphi_A - \psi) + m_A \\ T_A &= (3R/2L)(\varphi_A - \psi) + t_A \\ T_B &= -(3R/2L)(\varphi_A - \psi) + t_B \end{aligned}\right\} \qquad (10.12)\ ]$$

Le reste des efforts intérieurs s'obtient comme au § 10.3.4.

=

→ 10.4.4. Remarque

Lorsqu'on étudie l'état de déplacement unité correspondant à la translation horizontale ou verticale d'un groupe de nœuds, fig (10.15), l'équation d'équilibre correspondante n'est plus celle d'un nœud isolé, mais de tout le groupe des nœuds qui subissent le déplacement unité.

Dès lors, si le calcul des k_{ij} (et k_{ip}) s'étend toujours à toutes les barres touchées par le déplacement unité, on remarquera que ces barres ne convergent pas ~~ne convergent~~ en un même nœud. Dans le cas de la fig (10.15) on a : $k_{33} = 2 \times 12\,EI/h^3 + 3EI/h^3$

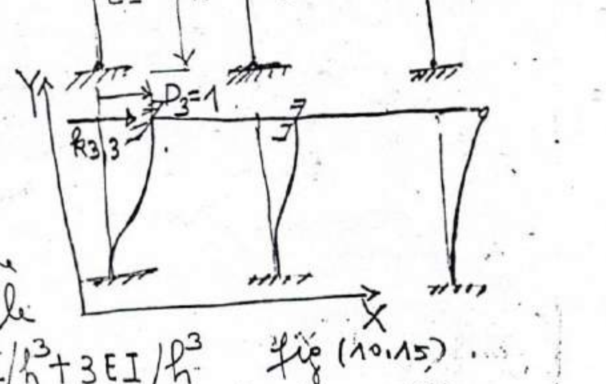


fig (10.15)

→ on verra sur la page (103)

10.5. Structures à noeuds mobiles comportant des barres obliques

Ici, la méthode des rotations s'avère beaucoup moins pratique que dans les structures à mailles rectangulaires.

[Soit la structure de la fig.(10.16), de degré d'indétermination cinématique $m = 3$; il se compose de :

a.- de 2 rotations des noeuds B et C : D_1 et D_2

b.- de 1 degré de mobilité dû au mouvement d'ensemble du portique dans son plan comme une chaîne. On l'annule p.ex par le blocage simple correspondant à l'inconnue

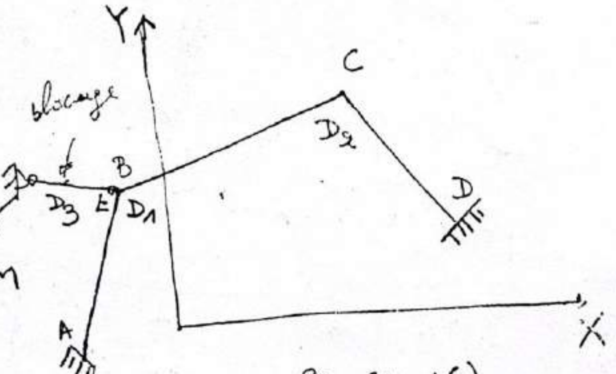


fig. (10.16)

$D_3 \perp$ à AB.

Mais la difficulté propre à de telles structures, c'est que les déplacements des noeuds correspondant aux degrés de mobilité n'ont généralement plus lieu parallèlement aux axes XY. Ce problème sera résolu plus facilement par la méthode de Cross.

Remarquons aussi que plus le degré de mobilité d'une structure est élevé, moins elle a des liaisons, donc moins elle est hyperstatique au sens de la méthode des forces.] On [la] résoudra donc avantageusement par la méthode des forces ou celle de Cross.

10.6. Recherche de lignes d'influence

On peut évidemment chercher les lignes d'influence des M, N et T dans les structures par la méthode générale basée sur le théorème de Land. Mais la méthode de rotations se prête à un procédé plus rapide, qui revient à appliquer comme méthode la <u>définition</u> de la ligne d'influence ;

On procède comme suit :

a.- On envisage la charge unité comme occupant successivement les diverses travées sur lesquelles elle peut circuler, fig (10.17). Pour chacune de ces sollicitations, il n'y a qu'une seule travée chargée, celle occupée par la charge unité. Les forces aux deux extrémités d'une telle travée sont donc (table 8, notations de la fig. (10.17) et P= −1) :

$$\{k_P\} = \begin{Bmatrix} t_A \\ m_A \\ t_B \\ m_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x'^2(L+2x)}{L^3} \\ \dfrac{x\,x'^2}{L^2} \\ \dfrac{x^2(L+2x')}{L^3} \\ -\dfrac{x^2x'}{L^2} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{k_P\} = \begin{Bmatrix} t_A \\ m_A \\ t_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x'(3L^2-x'^2)}{2L^3} \\ \dfrac{x x'(L+x')}{2L^2} \\ \dfrac{x^2(3L-x)}{2L^3} \end{Bmatrix} \quad (10.23)$$

selon que la travée soit du type bi-encastré ou encastré-appuyé.

Les efforts intérieurs dans ces vecteurs étant dus à une charge unité, on les appellera <u>coefficients d'influence</u>.

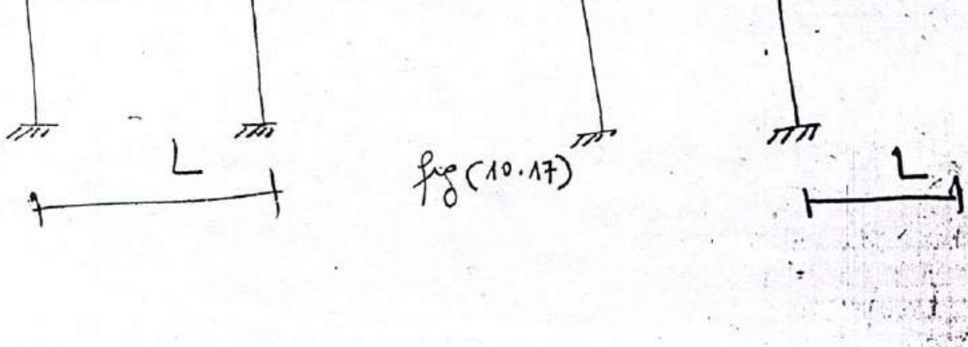


fig (10.17)

b.- On résout la structure avec ces seconds membres littéraux. L'application des relations forces - déplacements fournit toutes les lignes d'influence souhaitables, puisque tout effort intérieur sera exprimé en fonction de x et x'.

Remarque

Seuls les seconds membres des équations (9.2) changent pour diverses travées, il faut donc résoudre (9.2) avec tous les seconds membres.

× 10.7. Structures à nœuds fixes ~~ou à mailles parallèles~~ comprenant des barres à moment d'inertie variable

Pour résoudre une structure comprenant de telles barres, il suffit de connaître $[k]$ et $\{k_p\}$ de ces barres. Nous les trouverons en établissant la relation forces - déplacements (9.1).

Examinons le cas d'une barre rectiligne AB, fig(10.18), dont les extrémités ne peuvent avoir que des déplacements de rotations α_g et α_d (structures à nœuds fixes) ; les forces F_i associées à ces déplacements sont les moments aux extrémités M_g et M_d.

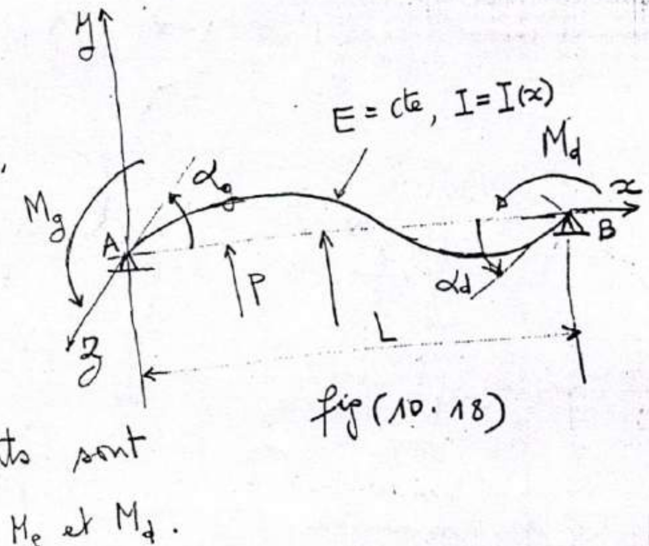


fig (10.18)

La relation à établir est :

$$\begin{Bmatrix} M_g \\ M_d \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \alpha_g \\ \alpha_d \end{Bmatrix} + \{k_p\}$$ est identique à (10.3)

On sait que, théorème des deux moments, le moment fléchissant courant vaut :

$$M(x) = - M_g (L - x)/L + M_d\, x/L + \mu(x).$$

Par le théorème de la force unité :

$$\alpha_g = \int_0^L \frac{M(x) \cdot M_1 \, dx}{E\, I(x)} \quad ; \quad \alpha_d = \int_0^L \frac{M(x)\, M_2}{E\, I(x)} dx \quad \text{où}$$

$$M_1 = -(L-x)/L \quad \text{et} \quad M_2 = x/L$$

En développant les expressions de α_g et α_d, on trouve :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_g &= \frac{1}{EL^2}\left(M_g \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx - M_d \int_0^L \frac{x(L-x)}{I} dx - L \int_0^L \frac{\mu(L-x)}{I} dx \right) \\ \alpha_d &= \frac{1}{EL^2}\left(-M_g \int_0^L \frac{x(L-x)}{I} dx + M_d \int_0^L \frac{x^2}{I} dx + L \int_0^L \frac{\mu x}{I} dx \right) \end{aligned}\right\} (a)$$

Posons :

$$I_g = \int_0^L \frac{x^2}{I} dx \; ; \; I_d = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx \; ; \; I_{gd} = \int_0^L \frac{x(L-x)}{I} dx \; ;$$

$$S_g = \int_0^L \frac{\mu x}{I} dx \; ; \quad S_d = \int_0^L \frac{\mu(L-x)}{I} dx .$$

Les formules (a) s'écrivent :

$$I_d M_g - I_{gd} M_d = E\, \alpha_g L^2 + L S_d$$

$$- I_{gd} M_g + I_g M_d = E\, \alpha_d L^2 - L S_g \quad , \text{ par résolution :}$$

$$M_g = \frac{E L^2 I_g}{\Delta} \alpha_g + \frac{E L^2 I_{gd}}{\Delta} \alpha_d + \frac{L(-S_g I_{gd} + S_d I_g)}{\Delta}$$

$$M_d = \frac{E L^2 I_{gd}}{\Delta} \alpha_g + \frac{E L^2 I_d}{\Delta} \alpha_d + \frac{L(S_d I_{gd} - S_g I_d)}{\Delta}$$

où $\Delta = I_d I_g - I_{gd}^2$, c'est la relation forces – dépl. cherchée,

que l'on écrit en posant :

$$m_g = \frac{L(-S_g I_{gd} + S_d I_g)}{\Delta}$$

$$m_d = \frac{L(S_d I_{gd} - S_g I_d)}{\Delta}$$

moment d'encastrement produits dans la barre bi-encastrée AB par les charges extérieures ($\alpha_g = \alpha_d = 0$),

avec $R_1 = E L^2 I_{gd} / \Delta$,

$$\left\{\begin{matrix} M_g \\ M_d \end{matrix}\right\} = R_1 \begin{bmatrix} I_g/I_{gd} & 1 \\ 1 & I_d/I_{gd} \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} \alpha_g \\ \alpha_d \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} m_g \\ m_d \end{matrix}\right\} \quad (10.14)$$

ce qui constitue la relation forces - déplacements de la méthode des rotations étendue aux structures à noeuds fixes* comportant des barres à moment d'inertie variable.

Dans le cas de la barre encastrée - appuyée, fig (10.19)

On établit de la même manière, en reprenant les calculs comme ci-dessus, en posant au départ $M_d = 0$. La relation force - déplacement de ce cas est :

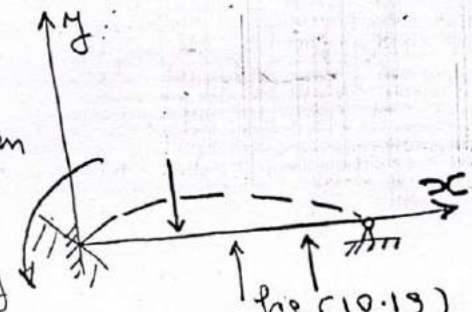


fig (10.19)

(10.15)

$$M_g = \frac{E L^2}{I_d} \alpha_g + \frac{L S_d}{I_d}$$

Dans le cas des barres symétriques de forme et de sollicitation, on a ; $I_g = I_d$, $S_g = S_d$, $m_g = \frac{L S_g}{I_g + I_{gd}}$ et

$$m_d = -\frac{L S_g}{I_g + I_{gd}} \quad ; \quad m_g = -m_d .$$

* pour le cas des structures à noeuds mobiles, voir littérature ou méthode de Cross.

→ Chapitre 11 : Méthode de Cross

11.1 Introduction

La méthode de Cross est un procédé de calcul servant à résoudre par approximations successives, les structures planes [à noeuds fixes] avec l'avantage de fournir directement comme résultat les moments fléchissants agissant sur les extrémités des barres de la structure. [Grâce au principe de superposition, on montrera comment traiter les structures à noeuds mobiles.]

On fera usage des résultats obtenus au chapitre précédent, (méthode des rotations [appliquée aux structures à noeuds fixes, déviation, barres à inertie variable)] puisque la méthode de Cross en est une application particulière ; la convention de signes reste inchangée. [Dans l'exposé classique de la méthode de Cross, on considère les moments fléchissants agissant directement sur les noeuds et l'équilibre de ces derniers, en prenant comme sens de rotation positif de ces moments le sens horlogique, fig (11.1). On constate en fait que cette convention est la même que celle de la méthode des déplacements, qui considère les moments agissant sur les extrémités des barres et positif dans le sens trigonométrique], fig (11.1). Nous garderons cette dernière convention.

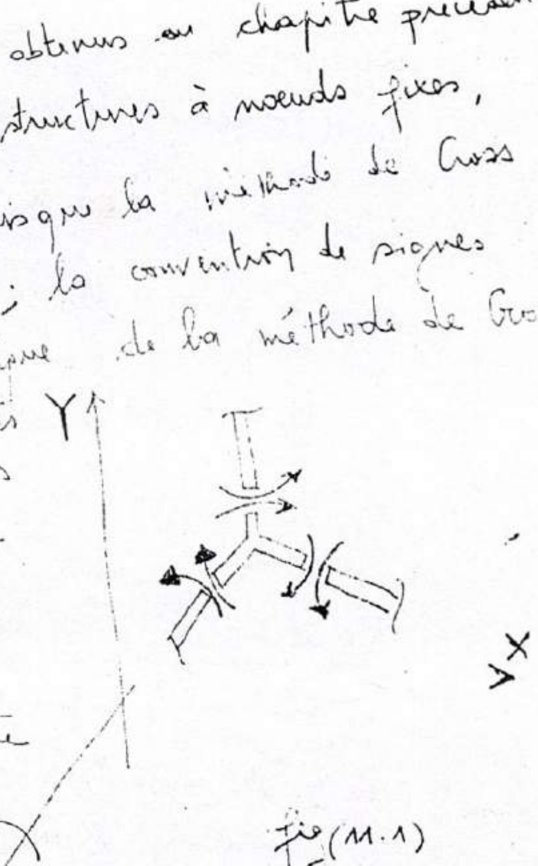


fig (11.1)

Au verso →

11.2. Les deux règles fondamentales pour les constructions formées de barres prismatiques.-

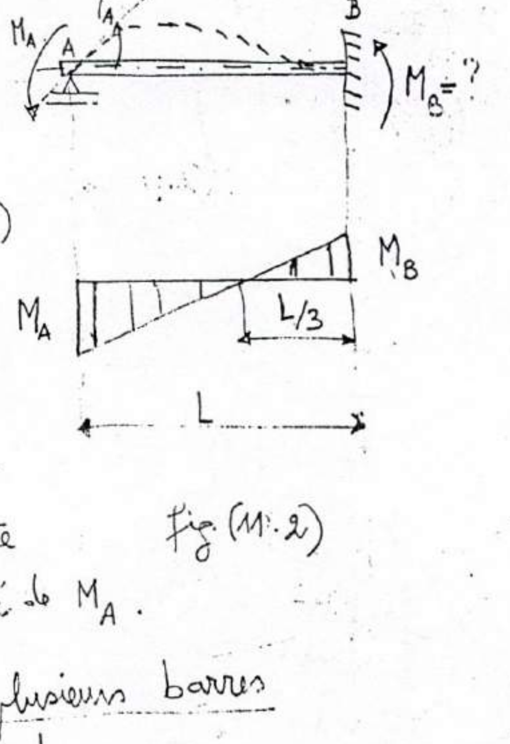
11.2.1. Transmission des moments le long d'une barre droite appuyée à une extrémité et encastrée à l'autre.

Considérons une barre prismatique appuyée en A et encastrée en B, fig. (11.2). Appliquons en A un moment extérieur M_A et cherchons le moment transmis à l'extrémité B.

Appliquons la relation force-déplacement (10.3b) avec $\varphi_B = 0$ et $m_A = m_B = 0$; On a :

$$M_A = R\,(2\varphi_A) \quad \text{et} \quad M_B = R\,(\varphi_A).$$

Par conséquent : $M_B = M_A / 2$. (11.1)



<u>Première règle</u> : Si une barre prismatique (rectiligne) AB appuyée en A et encastrée en B est sollicitée en A par un moment M_A, il en résulte en B un moment M_B égal à la moitié de M_A.

Fig. (11.2)

11.2.2. Répartition des moments entre plusieurs barres aboutissant à un même noeud.

Supposons qu'en un noeud rigide A, aboutissent plusieurs barres, dont certaines sont encastrées et d'autres articulées à leurs extrémités opposées, fig (11.3). Désignons par M_1, M_2, M_3 les parts d'un moment extérieur M_A, sollicitant le noeud, respectivement reprises par chaque barre.

Pour trouver ces parts, on résout ce problème une fois cinématiquement indéterminé par l'équation d'équilibre du noeud A :

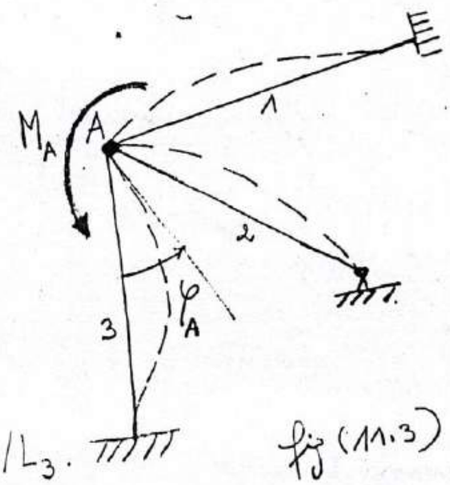


fig (11.3)

$$k_{AA} \cdot \varphi_A + k_{Ap} = P_A$$

dans laquelle $k_{Ap} = 0$, $P_A = M_A$

et $k_{AA} = \sum k_{AA}$ (barres)

$= 4EI_1/L_1 + 3EI_2/L_2 + 4EI_3/L_3$.

voir § 10.3.5.

d'où : $$\varphi_A = \frac{M_A}{\sum k_{AA} \text{ (barres)}}$$

Par la relation forces-déplacements (10.3a) ou (10.4a), on a :

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= k^1_{AA} \varphi_A = M_A \frac{k^1_{AA}}{\sum k_{AA}\text{ (barres)}} \\ M_2 &= k^2_{AA} \varphi_A = M_A \frac{k^2_{AA}}{\sum k_{AA}\text{ (barres)}} \\ &\text{etc...} \end{aligned}\right\} \quad (11.2)$$

où $k^i_{AA} = k_{AA}$ (barre i).

De façon générale (deuxième règle) : Si l'on applique un moment extérieur M_A à un noeud fixe A où aboutissent plusieurs barres, ce moment se répartit dans les différentes barres proportionnellement à leurs coefficients de rigidité k_{AA} respectifs.

Au verso →

On appelle <u>coefficient de partage</u> de M_A, et on note Π_i, les rapports multipliant M_A dans (11.2). On a donc par définition :

$$\Pi_i = k^i_{AA} \Big/ \sum k_{AA} \text{ (barres)} \qquad (11.3)$$

Dans l'exposé classique, on ne travaille pas avec les coefficients de rigidité, mais avec les raideurs R_i des barres. Dans ce cas <u>particulier</u>, fig(11.3), on a, $R = 2EI/L$;

$$k_{AA} = 2R_1 + 3R_2/2 + 2R_3 \quad \text{et}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= M_A \frac{R_1}{R_1 + \frac{3}{4}R_2 + R_3} \\
M_2 &= M_A \frac{\frac{3}{4}R_2}{R_1 + \frac{3}{4}R_2 + R_3} \\
M_3 &= M_A \frac{R_3}{R_1 + \frac{3}{4}R_2 + R_3}
\end{aligned}\right\} \qquad (11.2b)$$

On remarquera que dans la méthode classique, M_A se réparti proportionnellement aux raideurs des barres, mais il faut faire intervenir les 3/4 de la raideur si la barre est articulée à son extrémité opposée à A.

11.3. <u>Exposé physique de la méthode de Cross</u>

La méthode de Cross exploite le principe de superposition des effets. Soit, fig.(11.4), une poutre continue sur trois appuis A, B, C. Nous supposons que les rigidités des barres AB et BC sont égales et qu'une charge P est appliquée au milieu de la travée AB.

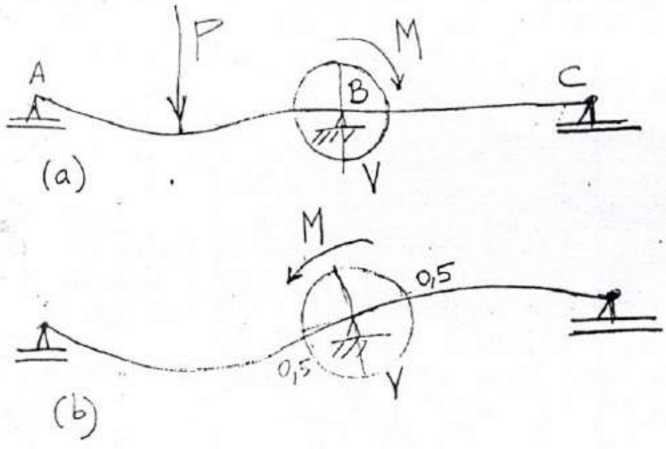


fig (11.4)

— Fixons angulairement le noeud B par un blocage simple, représenté par un volant V, puis appliquons la charge P. Le volant supportera alors un moment qui serait celui de la poutre AB, appuyée en A et encastrée en B.

— La travée BC n'est pas sollicitée, puisque ses extrémités ne tournent pas. Supposons à présent qu'ayant enlevé la force extérieure P, nous appliquions, à l'aide d'un volant V un couple égal et de signe contraire à celui supporté précédemment par ce volant, fig (11.4b). Le couple en question va se partager proportionnellement aux rigidités respectives des barres AB et BC, suivant la 2ème règle du § 11.2.2. Comme ici les coefficients des deux barres sont égaux (coefficients de partage = 0,5 et 0,5) les moments supportés par les barres AB et BC aboutissant au noeud B, seront égaux à M/2. — En superposant les sollicitations des fig (11.4a) et fig (11.4b) nous obtenons la sollicitation et la déformation réelles de la poutre sur 3 appuis donnée.

— Envisageons maintenant un cas un peu plus complexe, celui d'un portique double, fig. (11.5) chargé par une charge uniformément répartie sur la barre AB.

(Au verso) →

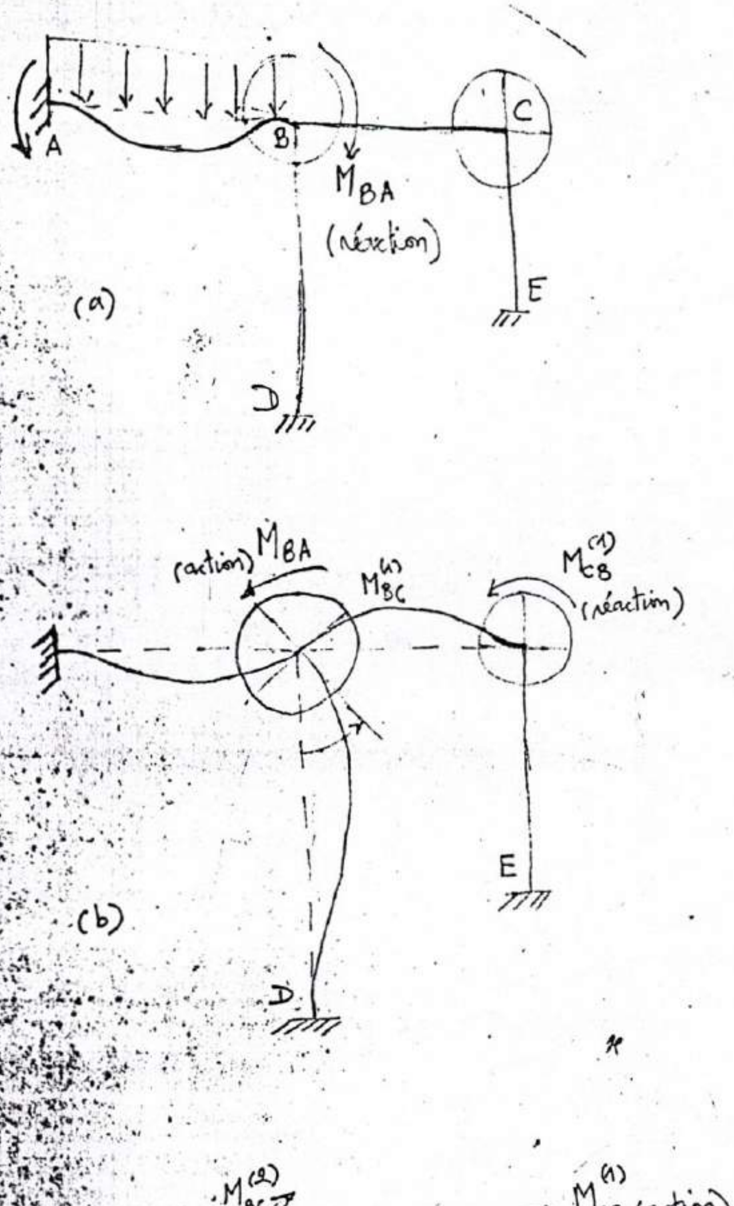


fig (11.5)

a. Plaçons aux noeuds B et C des volants pour empêcher ces noeuds de tourner.

b. Appliquons maintenant les forces extérieures (. la déformée prise par le portique), voir fig (11.5a) ; toutes les barres sont parfaitement encastrées à leurs extrémités ; les moments qui naissent à ces extrémités sont connus : ce sont les moments d'encastrement parfait m définis au § 10.3.2. de la méthode de rotation. Pour maintenir le noeud B fixe, le volant en B doit réagir avec un couple de fixation M_{BA} égal et opposé au moment d'encastrement M_{BA}. Pour passer à la structure réelle, d'après le principe de superposition, nous devons ajouter à la sollicitation de la fig (11.5a), la sollicitation du portique sous le seul effet du couple de déviation M_{BA}.

c. Libérons le noeud B en lâchant le volant B mais en maintenant en place le volant C, fig. (11.5b). Sous l'effet du couple de déviation M_{BA}, le noeud B tourne [d'un certain angle φ^1_B et le portique se déforme] comme sur la fig (11.5 b). D'après la 2ème règle, M_{BA} se répartit dans toutes les barres aboutissant en B proportionnellement à leurs rigidités respectives. En particulier le moment en B appliqué sur la barre BC vaut M^1_{BC}. D'après la 1ère règle, les moments aux extrémités opposées des mêmes barres valent la moitié des premiers. En particulier, l'extrémité C, et par conséquent le volant du noeud C ~~sont~~ est sollicité par un couple de moment :

$$M^1_{CB} = \frac{1}{2} M^1_{BC}.$$

Les moments ainsi trouvés constituent une première correction des moments d'encastrement parfaits trouvés à la phase (b).

d.- Considérons à présent le portique sollicité par le seul couple M^1_{CB} appliqué au noeud C. Libérons le volant C, et les barres CB et CE se déforment comme sur la fig (11.5 c). Le moment M^1_{CB} se répartit dans ces barres proport. à leurs rigidités respectives en moments M^2_{CB} et M^2_{CE}. D'après la 1ère règle fondamentale, il naît aux extrémités opposées B et E de ces barres des moments :

$$M^2_{BC} = \frac{1}{2} M^2_{CB} \quad \text{et} \quad M^2_{EC} = \frac{1}{2} M^2_{CE}.$$ Le noeud B est donc

à nouveau sollicité par un couple de déviation M^2_{BC}.

e.- Considérons le portique sollicité par le seul couple M^2_{BC} ; on répète les opérations de la phase (b) pour équilibrer le noeud B. Ce qui va faire naître dans la barre BC un moment M^3_{BC} et à l'extrémité C de la barre BC un moment $M^3_{CB} = \frac{1}{2} M^3_{BC}$

et ainsi de suite...

Au verso

On libérera ainsi successivement le noeud B, puis le noeud C, puis à nouveau B, etc... jusqu'à ce qu'on constate que les couples de déviation à considérer deviennent négligeables.

Les moments réels dans les barres s'obtiennent en superposant les moments partiels obtenus dans les phases ~~(a)~~ (b), (c), (d), (e), etc...

En général, il y a plus de deux noeuds à équilibrer et il y a aux extrémités des barres divers couples d'encastrement parfait provoqués par les forces extérieures.

Afin d'obtenir une convergence rapide des moments vers leurs valeurs définitives, il y a lieu de commencer l'équilibrage par le noeud où la somme algébrique des couples de déviation est la plus grande. Ensuite, on libérera le noeud qui, à la suite de la transmission des moments, se trouve le plus déséquilibré, et ainsi de suite...

Les corrections successives décroissent rapidement à cause d'une part du partage de chaque moment de déviation entre les différentes barres aboutissant au noeud et d'autre part du fait que la transmission le long d'une barre réduit le moment à sa moitié.

M.4. Marche détaillée des calculs

Considérons le portique double déjà étudié au § M.3 et dont les dimensions sont définies à la fig (M.6). Proposons-nous de le calculer en détail.

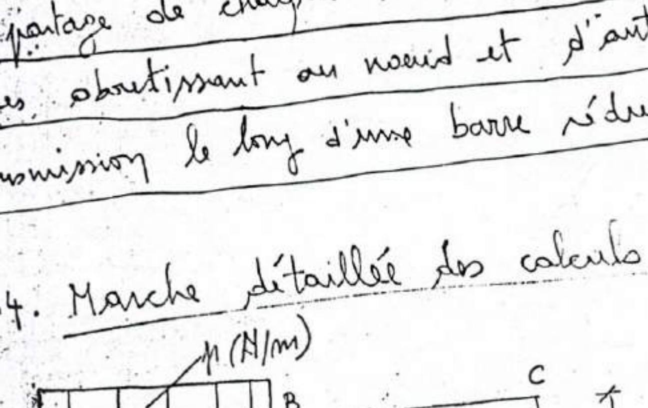


fig. (M.6)

107

On donne :

$I_1 = 0,73\,I$; $I_2 = 0,73\,I$; $I_3 = 0,61\,I$; $I_4 = 2,12\,I$ où

I = valeur de référence.

Les coefficients de rigidité des barres valent donc, avec $EI = 50\ (N.m^2)$

$k_1 = \dfrac{4EI_1}{L_1} = \dfrac{146}{6,1} = 23,9\ (N.m)$; $k_2 = 16,6$; $k_3 = 13,1$; $k_4 = 80$

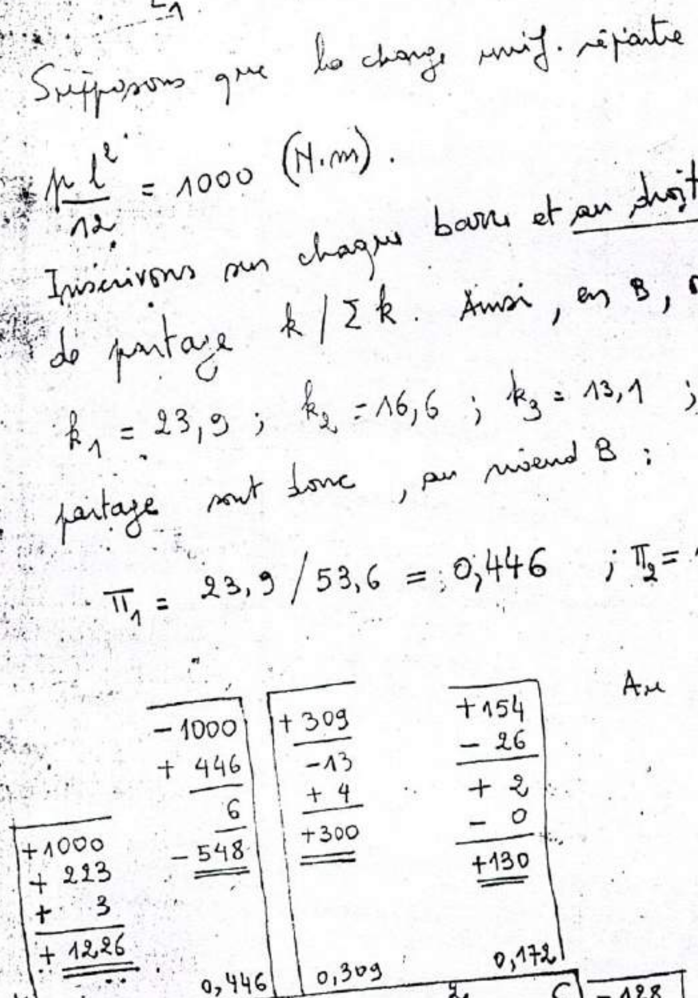
Supposons que la charge unif. répartie sur AB soit telle que

$\dfrac{p\,l^2}{12} = 1000\ (N.m)$.

Inscrivons sur chaque barre et au droit de chaque noeud les coefficients de partage $k / \Sigma k$. Ainsi, en B, on a :

$k_1 = 23,9$; $k_2 = 16,6$; $k_3 = 13,1$; $\Sigma k = 53,6$. Les coefficients de partage sont donc, au noeud B :

$\pi_1 = 23,9 / 53,6 = 0,446$; $\pi_2 = 16,6 / 53,6 = 0,309$; $\pi_3 = 13,1 / 53,6 = 0,245$



Ordre de déblocage
B, C, B, C.

fig (11.7)

Au noeud C on a :

$k_2 = 16,6$, $k_4 = \dfrac{4EI_4}{L_4} = \dfrac{4 \times 2,12\, EI}{L_4} = \dfrac{4 \times 2,12 \times 50}{5,3} = 80$

$\Sigma k = 96,6$. Les coefficients de partage sont : π_2

$\pi_2 = 16,6 / 96,6 = 0,172$

$\pi_4 = 80 / 96,6 = 0,828$

Au verso.

Inscrivons à présent sur la fig (11.7) et près des sections envisagées, les valeurs de m, soit +1000 et −1000 aux extrémités de AB et zéro aux autres extrémités de barres. Libérons d'abord le noeud B et introduisons le couple de <u>déviation</u> $\sum m = +1000$. Il se répartit dans les barres 1,2 et 3 selon la seconde règle, provoquant des moments positifs qu'on obtient en multipliant par +1000 les coefficients de partage ; cela donne :

+446 dans (1), +309 dans (2) et +245 dans (3).

Inscrivons ces corrections sous les moments correspondants et traçons une barre en-dessous pour souligner le fait que, jusqu'ici, le noeud B est en équilibre. Les moments de correction qu'on vient de trouver en B se propagent en A, C et D suivant des moments égaux à leur moitié ; inscrivons ces corrections sous les moments correspondants.

Refixons à ce stade (moment) le noeud B et libérons C. Le couple de déviation à y introduire est 0 − 154 ; il crée dans 2 et 4 des moments qui valent :

pour 2 : $-154 \times 0{,}172 = -26$ et pour 4 : $-154 \times 0{,}828 = -128$.

Inscrivons ces corrections sous les moments déjà trouvés et traçons une barre pour souligner le fait que C est à présent à l'équilibre. Les moments de correction se propagent en B et E suivant des valeurs égales à leur moitié.

Refixons le noeud C et libérons à nouveau le noeud B. Le moment de déviation y vaut à présent la somme changée de signe de tous les moments inscrits sous les barres déjà tirées, soit ici +13 ; il se partage en 3 parties qui valent : +6, +4, +3, qui se propagent suivant leur moitié en A, C et D. Le noeud B est de nouveau en équilibre, ce que les barres horizontales indiquent. On refixe B et on libère à nouveau C. Le moment de déviation ne vaut à présent plus que −2, qui se partage en 0 et −2 ; le 0 ne contrarie plus l'équilibre de B et, −2 donne −1 en E.

Les opérations sont finies ; il ne reste plus qu'à faire en chaque section la somme algébrique (r.e.a.?) des M inscrits les uns en-dessous des autres. Nous soulignons deux fois. Ce sont les résultats définitifs, qui fournissent les moments fléchissants aux extrémités des barres de la structure chargée.

Remarques : 1.- Avant de commencer le schéma de Cross, il est bon que les valeurs des moments d'encastrement maxima soient voisines de 1000. On peut satisfaire ce point par un choix judicieux des unités. Ainsi on poussera les calculs jusqu'à l'unité, de sorte que l'erreur relative sera de l'ordre de 0,5%.

2.- Il est bon d'indiquer sur le schéma l'ordre dans lequel on libère les noeuds, de manière à pouvoir vérifier les calculs à la fin des opérations

1	Extrémités des barres	AB	BA	BD	BC	CB	CE	Noeuds libérés
2	Coefficients de répartition	—	0,446	0,245	0,309	0,172	0,828	
3	Moments d'encastrement parfaits	+1000	−1000	—	—	—	—	B
4	Répartition		+446	+245	+309	—	—	
5	Transmission	+223	—	—	—	+154	—	C
6	Répartition		—	—	—	−26	−128	
7	Transmission	—	—	—	−13	—	—	B
8	Répartion		+6	+3	+4	—	—	
9	Transmission	+3	—	—	—	+2	—	C
10	Répartition	—	—	—	—	0	−2	
11	Moments totaux	+1226	−548	+248	+300	+130	−130	

Tableau (11.1)

et corriger éventuellement les erreurs.

3.- Au lieu d'inscrire tous les calculs sur le schéma de l'ossature, on peut aussi les disposer en tableau. Pour l'exemple traité, voir tableau (11.1)

Au verso →

11.5. Recherche des efforts intérieurs.

La méthode de Cross fournit les moments de flexion agissant sur les extrémités de toutes les barres. On recherche donc les autres efforts intérieurs comme expliqué (au § 10.3.4.) de la méthode des rotations.

11.6. Structures sollicitées par des déplacements imposés des nœuds

Les considérations développées ci-dessous s'appliquent aussi à la méthode des rotations.

11.6.1. Introduction : Tassements d'appui, variations de température, etc... – Moments d'encastrement parfait aux extrémités d'une barre denivelée.

Soit, pour fixer les idées, une poutre continue, fig. (11.8), dont l'appui A_i subit une dénivellation f.

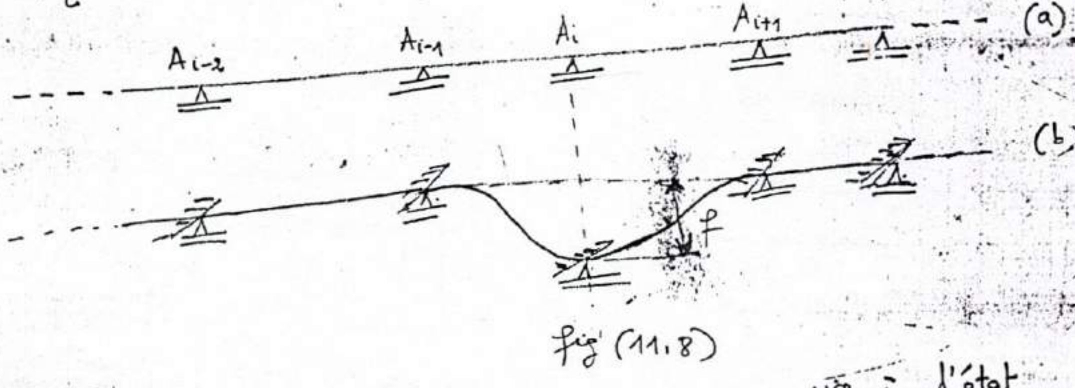


fig (11,8)

La fig (11.8b) montre la structure C soumise à l'état de déplacement dû à la sollicitation extérieure. Cette sollicitation a pour effet de créer aux blocages simples i-1, i et i+1 des moments qui sont [les termes indépendants K_{ip} des équations d'équilibre (9.9) ci dessous] les moments d'encastrement parfait

[Calculons les moments d'encastrement parfaits qui naissent aux extrémités d'une barre dont les appuis subissent des translations perpendiculaires à l'axe de cette barre. On dit que la barre subit une déviation ou qu'elle est dénivelée.]

Pour la barre bi-encastrée de la fig (11.9), dont les 2 appuis subissent les translations D_1 et D_3, la déviation $\psi = (D_3 - D_1)/L$ ou encore la dénivellation $f = D_3 - D_1$. On calcule par la relation (10.9) ou (10.11) : (les moments d'encastrements parfaits)

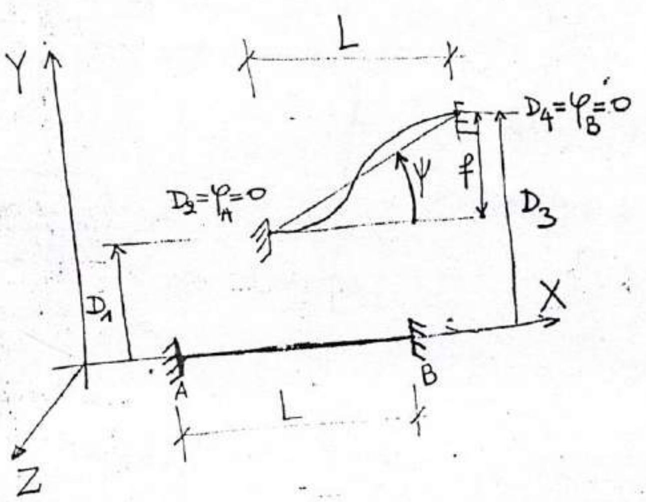


fig (11.9)

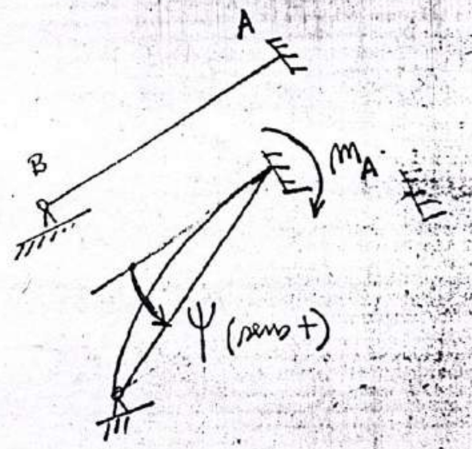


fig (11.10)

$$m_A = m_B = \frac{6EI}{L^2}(D_1 - D_3) = -\frac{6EI}{L^2} f = -\frac{6EI}{L}\psi = -3R\psi \qquad (11.3)$$

On trouve pour une barre encastrée appuyée, fig(11.10) :

$$m_A = -3R\psi/2 \qquad (11.4)$$

Règle : Si une barre bi-encastrée subit une déviation ψ, elle est soumise à ses deux extrémités à deux moments égaux $m = -3R\psi$; si la barre est encastrée - appuyée, elle est soumise à son extrémité encastrée à un moment $m = -3R\psi/2$.

Au verso

→ Exemple

Supposons que le portique étudié au § 11.4 soit soumis à une augmentation uniforme de température $T = 30°C$. Le portique se déformera comme représenté à la fig. (11.11). En prenant $\alpha = 10^{-5}\ °C^{-1}$, on trouve les déplacements des noeuds suivants ;

$u_B = \alpha L_1 T = 10^{-5} \cdot 30 \cdot 610$
$= 0{,}183$ cm,

$v_B = 0{,}279$ cm, $u_C = 0{,}447$ cm,

$v_C = 0{,}159$ cm. D'où (avec $EI = 5 \cdot 10^{7}$ N.m) :

barre 1 : $m_1 = -6EI_1 v_B / L_1^2$
$= -16.400$ N.m

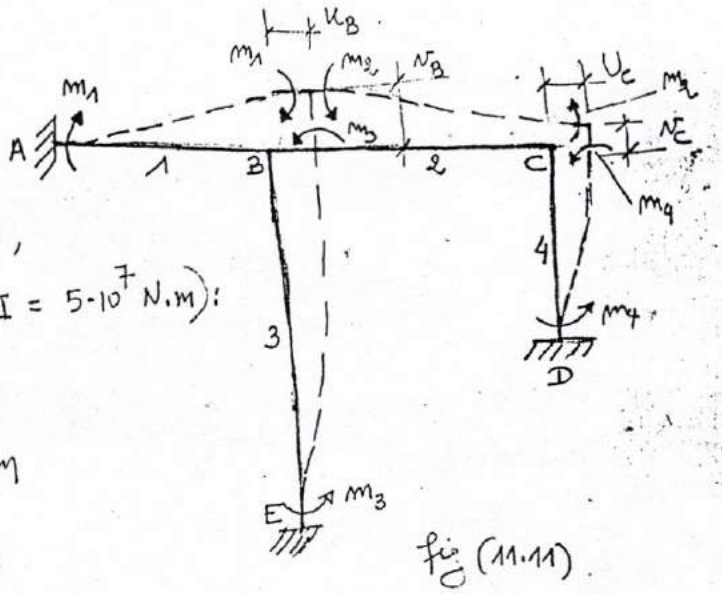


fig (11.11).

barre 2 : $m_2 = 3390$ N.m

barre 3 : $m_3 = 3.870$ N.m

$\psi^{+} \Rightarrow M^{-}$ voir fig. 11.9

barre 4 : $m_4 = 101.000$ N.m.

Ce sont les moments de départ d'encastrement parfaits du schéma de Cross.

11.6.2. Effets secondaires dans les treillis à noeuds rigides

On appelle efforts secondaires dans les poutres en treillis ceux qui naissent dans les barres de ces poutres ~~par suite~~ du fait que ces barres ne sont pas articulées aux noeuds, comme on le suppose généralement, mais bien assemblées rigidement entre elles.

Comme on l'a montré au § 10.2, la flexion des barres ne provoque que des variations négligeables ~~dans~~ de la longueur de leurs cordes. On peut donc considérer que les déplacements

élastiques des noeuds de la poutre réelle à noeuds rigides sont pratiquement les mêmes que ceux de la poutre à noeuds articulés.
Cela étant, on suppose connus par une étude préalable, par exemple par la méthode [de Williot-Kerkhofs] de la force unité, les déplacements de tous les noeuds. On peut calculer les déviations ψ grâce aux déplacements des noeuds, et par conséquent les moments d'encastrement parfait aux extrémités des barres, règle du § 11.6.1.

11.6.3. Relations géométriques entre les déviations ψ des barres d'un contour

(Il n'est pas toujours facile) Il s'agit de trouver toutes les déviations ψ que subissent les barres d'une structure soumise à un déplacement imposé d'un de ses noeuds, [surtout si elle a des barres obliques dessinant un contour polygonal], comme celle de la fig (11.12). (la structure à noeuds fixes p.ex. celle de la fig)

Soit une barre AB, fig. (11.13) appartenant à une structure dont les noeuds peuvent subir des déplacements, et supposons qu'après déplacement cette barre occupe la position A'B'.

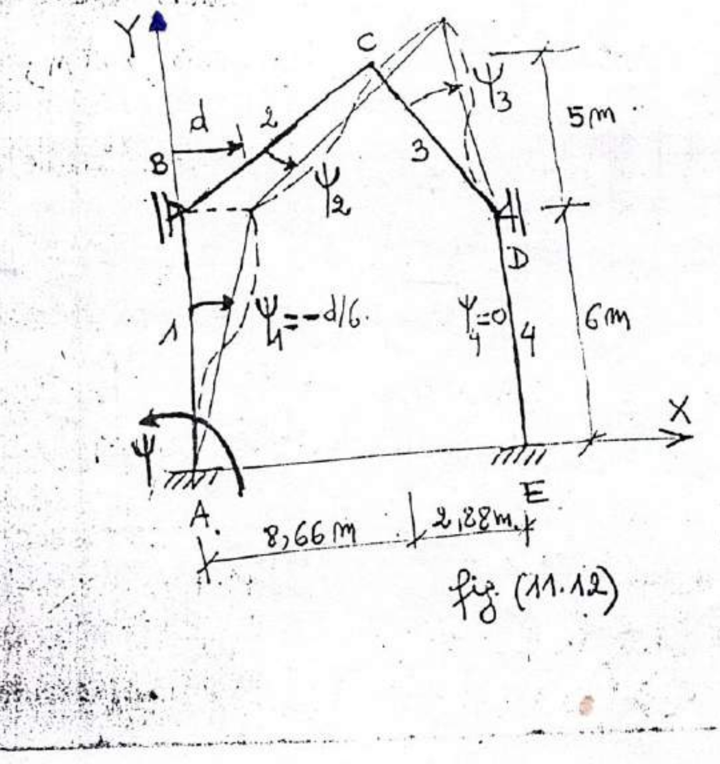


fig. (11.12)

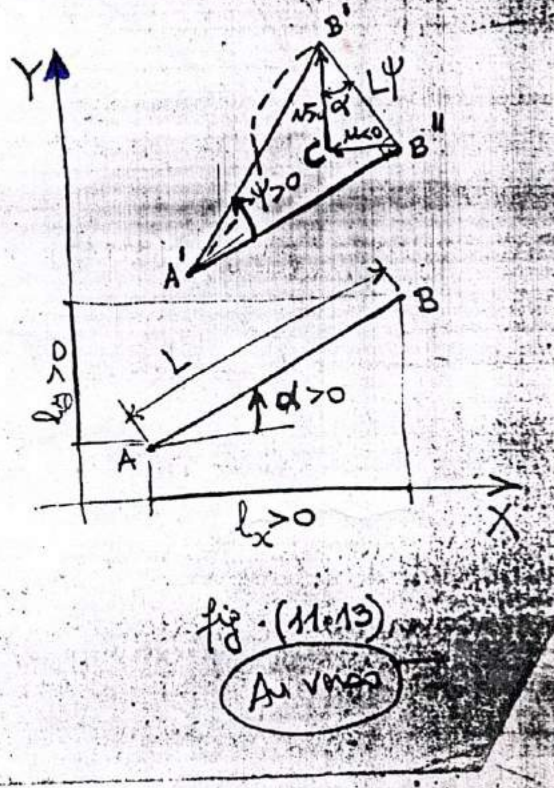


fig. (11.13)

Au verso

Le déplacement de la barre peut se décomposer en une translation amenant la barre en A'B'' et une rotation autour de A', l'amenant en A'B'.
Comme ψ est petit, on peut considérer que B''B' ⊥ à A'B'' et que l'angle CB'B'' est égal à l'angle α entre AB et l'axe des x. aussi $B'B'' = L\psi$.

La figure (11.13) montre que les composantes u et v du déplacement du point B par rapport à A, dues à ψ seul, sont en grandeur et en signe :

$$\left.\begin{aligned} u &= -L\psi\sin\alpha = -l_y\cdot\psi \\ v &= L\psi\cos\alpha = l_x\cdot\psi \end{aligned}\right\} \quad (11.5)$$

La barre AB est supposée orientée, p. ex de A vers B positivement, de sorte que ses projections l_x et l_y ont un signe.

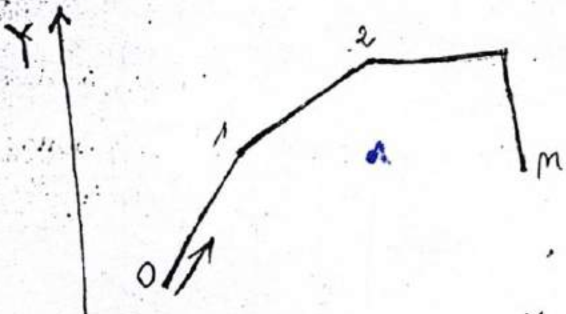


fig (11.14)

Considérons maintenant un contour polygonal 0, 1, 2, ..., M orienté positivement de O à M, fig. (11.14).
Appelons u_0, v_0 et u_m, v_m, respect., les composantes du déplacement des points O et M ;

en appliquant pour chaque barre les formules (11.5), on trouve

$$\left.\begin{aligned} u_m - u_0 &= -\sum_1^m l_y\cdot\psi \\ v_m - v_0 &= +\sum_1^m l_x\cdot\psi \end{aligned}\right\}$$

$u_1 - u_0 = -l_y^1\psi_1$
$u_2 - u_1 = -l_y^2\psi_2$
$u_3 - u_2 = -l_y^3\psi_3$ (11.6)
- - -

Dans un contour fermé, càd dont les extrémités O et M coïncident, on a :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{contour}\, l_x\psi &= 0 \\ \Sigma_{contour}\, l_y\psi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (11.7)$$

Les formules (11.6) ou (11.7), appliquées une ou plusieurs fois à l'ensemble des barres composant une structure, permettent de calculer tous les ψ et par conséquent de répondre le problème posé.

Exemple : Calculer les ψ produits dans les barres de la structure de la fig. (11.12) soumise à un déplacement horizontal du point B.

Prenons, pour simplifier, $\psi_1 = -1$; $\psi_2 = ?$ $\psi_3 = ?$ avec $\psi_4 = 0$.

(11.6) appliquées au contour ABCD donnent :

$$\left.\begin{array}{l} 0.\psi_1 + 8{,}66.\psi_2 + 2{,}88.\psi_3 = 0 \\ +6.\psi_1 + 5.\psi_2 + 5\,\psi_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi_2 = 0{,}30 \text{ et } \psi_3 = -0{,}90$$

(avec $U_A = U_D = V_A = V_D = 0$)

11.7 Généralisation des deux règles fondamentales de la méthode de Cross pour les barres à moments d'inertie variable.-

11.7.1. Cas général.

Dans la méthode des rotations, pour les barres à moment d'inertie variable, bi-encastrées ou encastrées-appuyées, les relations forces-déplacements (10.14) et (10.15) sont les suivantes :

pour la barre bi-encastrée :

$$\begin{Bmatrix} M_g \\ M_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_g \\ \alpha_d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_g \\ m_d \end{Bmatrix} \qquad (11.8)$$

avec $k_{11} = R_1 \, I_g / I_{gd}$, $k_{12} = k_{21} = R_1$, $k_{22} = R_1 \, I_d / I_{gd}$ (11.9)

112

pour la barre encastrée à gauche et appuyée à droite :

$$M_g = k_{11} \alpha_g + m_g \qquad (11.10)$$

avec
$$k_{11} = EL^2 / I_d \qquad (11.11)$$

a. Transmission des moments le long d'une barre appuyée à une extrémité et encastrée à l'autre.

Soit une barre droite à moment d'inertie variable, appuyée en g et encastrée en d, fig. (11.15). Appliquons en g un moment extérieur M_g et cherchons quel est le moment transmis à l'extrémité d.

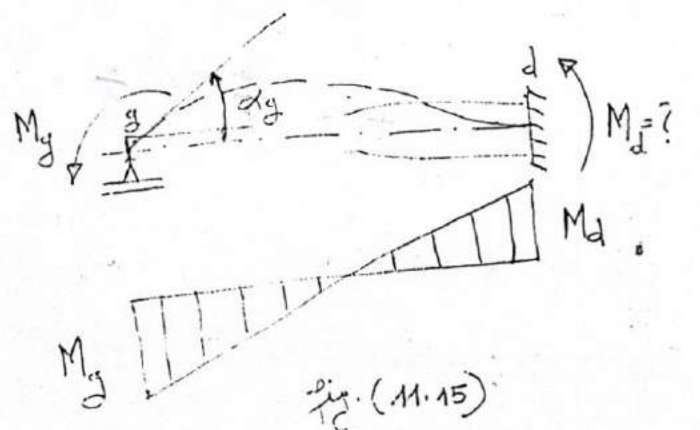


fig. (11.15)

On a $\alpha_d = 0$ et $m_g = m_d = 0$; d'où, en appliquant (11.8),

$$M_g = k_{11} \alpha_g \quad \text{et} \quad M_d = k_{21} \alpha_g \; ; \qquad \text{d'où} \; ;$$

$$M_d = M_g \cdot k_{21} / k_{11} = M_g \cdot I_{gd} / I_g$$

Première règle :

(1) si une barre gd à moment d'inertie variable, appuyée en g et encastrée en d, est sollicitée en g par un moment M_g, il en résulte en d un moment :

$$M_d = M_g \frac{I_{gd}}{I_g} = M_g \frac{k_{12}}{k_{11}} \qquad (11.12)(i)$$

(2) inversement, si la barre est encastrée en g, appuyée en d et sollicitée en d par un moment M_d, il en résulte

en g un moment

$$M_g = M_d \frac{I_{gd}}{I_d} = M_d \frac{k_{12}}{k_{22}} \qquad (11.12b)$$

Le(s) multiplicateur(s) de M_g dans (11.12(a)) et de M_d dans (11.12b) s'appelle(nt) coefficient(s) de transmission γ. Qd la barre est à inertie constante, $\gamma = \frac{1}{2}$.

b. Répartition des moments entre plusieurs barres aboutissant à un même noeud, fig. (11.3).

Les formules (11.2) restent valables, et la 2ème règle, § 11.2.2, aussi.

c. Barres subissant une déviation

Pour trouver les moments d'encastrement parfait m^o produits aux extrémités d'une barre par une déviation ψ, il suffit de poser

— dans (11.8) (barre bi-encastrée, fig (11.16 a)):

$$\alpha_g = \alpha_d = -\psi \;, \quad m_g = m_d = 0 \;;$$

— dans (11.10) (barre encastrée - appuyée, fig. (11.16b)):

$$\alpha_g = -\psi \;, \quad m_g = 0 .$$

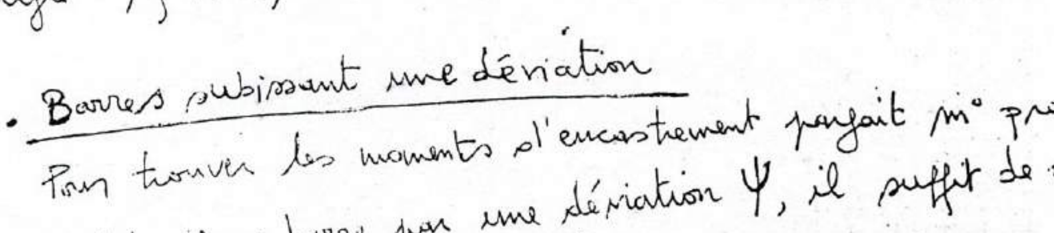


fig (11.16)

D'où :

barre bi-encastrée :
$$\left.\begin{aligned} m_g^o &= -(k_{11} + k_{12})\psi \\ m_d^o &= -(k_{21} + k_{22})\psi \end{aligned}\right\} \qquad (11.13)_a$$

barre encastrée - appuyée : $m_g^o = -k_{11}\,\psi$ (11.13 b)

11.7.2. Barres symétriques.

Dans ce cas, les formules ci-dessus, avec $I_g = I_d$ et $k_{11} = k_{22}$, se simplifient. Dans (11.12 (a et b)), les multiplications de M_g et M_d deviennent égaux. [Les formules (11.13 a) deviennent :

$$m_g^o = m_d^o = -\psi E L^2 / (I_g - I_{gd})\,]$$

11.8. Structures à noeuds mobiles : Introduction

[L'artifice développé ci-dessus pour traiter les structures à noeuds mobiles est général, applicable aussi dans la méthode des rotations, voir § 10.5.]

Rappelons que le degré de mobilité est le nombre minimum de blocages simples qu'il faut imposer à une structure à noeuds mobiles pour la rendre à noeuds fixes, voir § 10.2. On opère ces blocages simples à l'aide de bielles indéformables reliées à une fondation fixe.]

Pour l'exemple du portique brisé symétrique bi-encastré de la fig. (11.17), [le noeud B est mobile, et on le fixera par une bielle horizontale BB'.

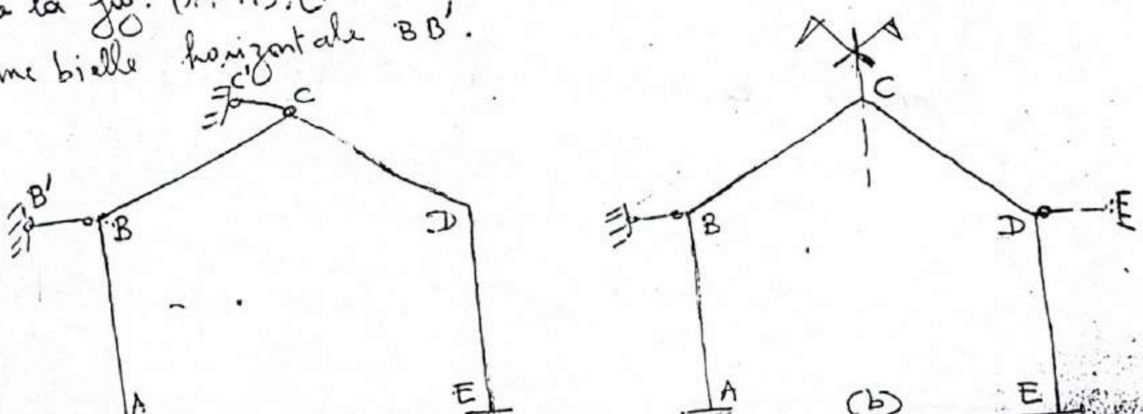


fig (11.17)

Pour empêcher C de tourner ⊥ment à BC, on le relie à un massif fixe par la bielle CC'. Le noeud D sera ainsi aussi fixé.]

Il y a ~~une infinité de~~ plusieurs façons de choisir la position des bielles. (Si les rendre moments fixes)
Toutefois, on essayera de disposer les bielles de façon à simplifier l'étude. Pour le cas de la fig (11.17) il sera plus avantageux de disposer les bielles symétriquement, fig (11.17b) en vue de sauvegarder la symétrie initiale de la structure.

Dans le cas des structures à files de colonnes verticales et poutres (traverses) horizontales, fig (11.18), tous les noeuds d'un même étage

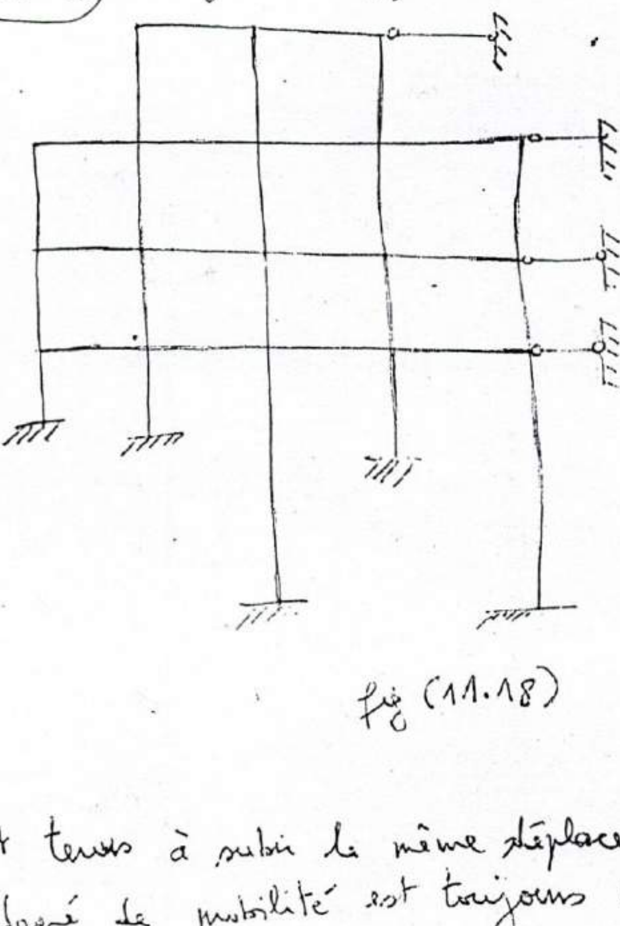


fig (11.18)

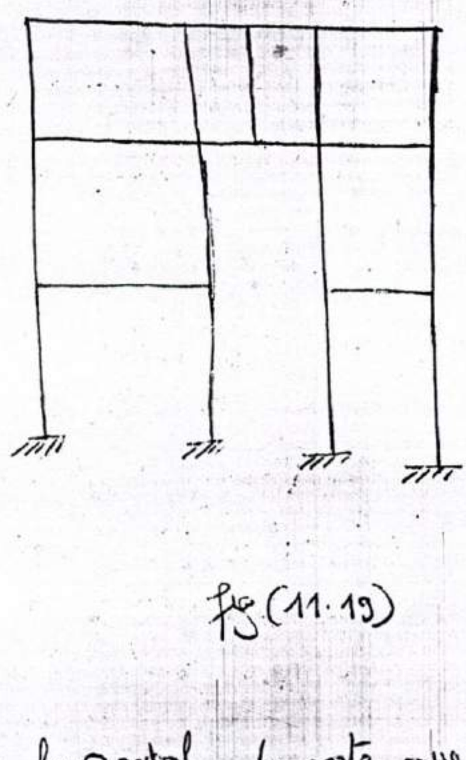


fig (11.19)

sont tenus à subir le même déplacement horizontal, de sorte que le degré de mobilité est toujours égal au nombre d'étages. Cependant cela n'est plus vrai si certaines files de traverses et/ou de colonnes sont interrompues. Dans le cas de la fig (11.19), le degré de mobilité est 5.

(11.7) 11.9. Traitement des structures à noeuds mobiles

11.9.1. Méthode Générale

L'artifice employé [pour étudier de telles structures remplace l'étude d'une structure à noeuds mobiles par celle de la même structure à noeuds fixes, mais soumise à plusieurs cas de charge.] C'est à nouveau une application du principe de superposition.

Soit, p. ex., le portique retroussé de la fig (11.18a), de degré de mobilité égal à 2. Pour l'étudier par la méthode de Cross, on procède comme suit:

– On transforme cette structure en une structure à noeuds fixes par l'introduction de 2 blocages simples 1 et 2 (bielles BB' et DD'), fig (11.18b). On peut résoudre par la méthode de Cross ce problème. Soit F sa solution. (les bielles n'intervenant pas dans les calculs de Cross car ne reprennent aucun moment seul un effort normal.)

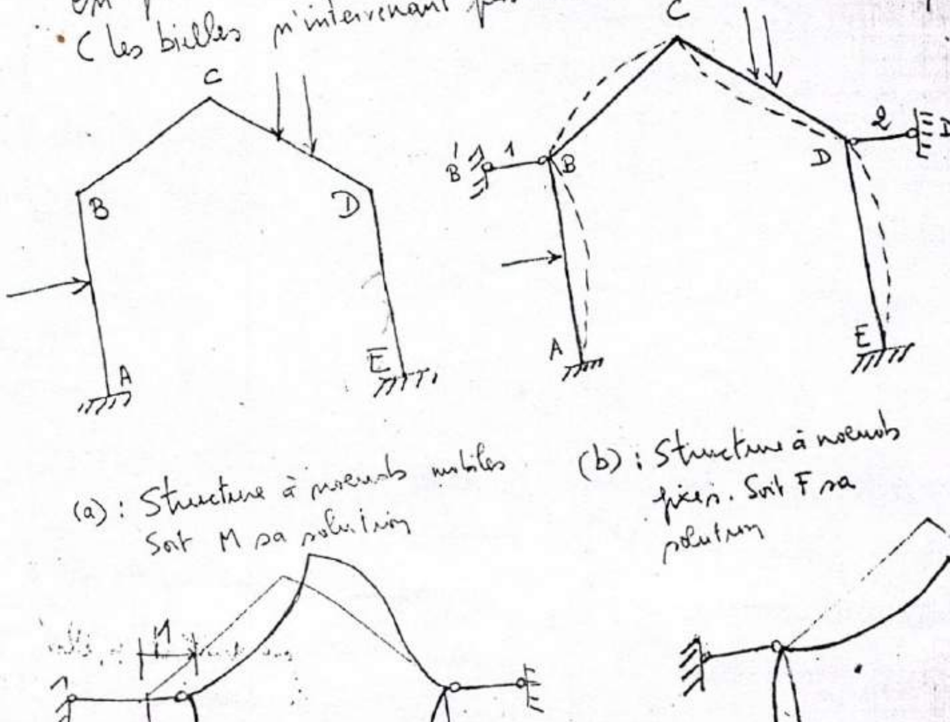
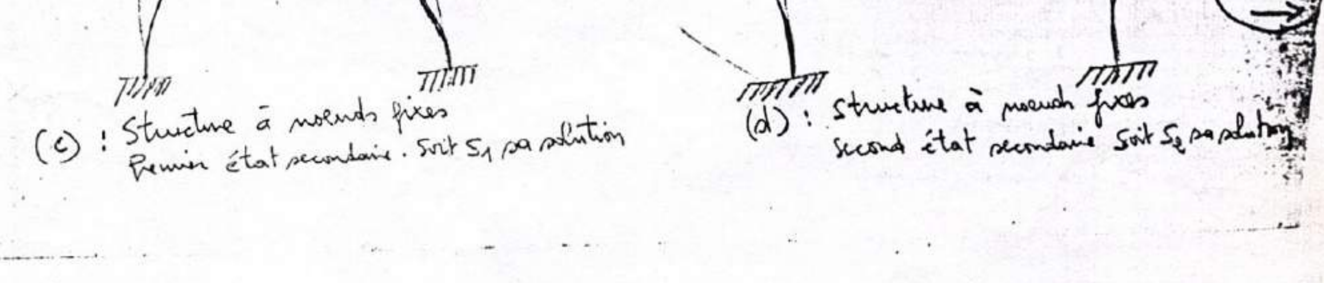


fig (11.18) bis

(a) : Structure à noeuds mobiles Soit M sa solution

(b) : Structure à noeuds fixes. Soit F sa solution



(c) : Structure à noeuds fixes Premier état secondaire. Soit S_1 sa solution

(d) : Structure à noeuds fixes second état secondaire Soit S_2 sa solution

Verso →

Il est clair que cette solution est incorrecte car en réalité les noeuds B et D subiront des déplacements.

— On opère sur la structure à noeuds fixes non chargée, un déplacement unité du blocage 1 seulement. On sait résoudre ce problème qui est le cas de structure à noeuds fixes soumise à un déplacement imposé d'un de ses noeuds. Voir § 11.6. Soit S_1 la solution de ce problème. (les bielles n'intervenant pas non plus dans les calculs de Cross). Une telle solution s'appelle <u>état secondaire</u> (ou état de déplacement unité secondaire).

— De même, soit S_2 la solution du second état secondaire, fig (11.18d), obtenue par résolution de la structure à noeuds fixes non chargée, soumise à un déplacement unité du second blocage simple seulement, donc du noeud D.

— En vertu du principe de superposition, la solution réelle M du problème initial de structure à noeuds mobiles, fig (11.18a) est donnée par la combinaison linéaire :

$$M = F + x_1 S_1 + x_2 S_2 \qquad (11.14)$$

où x_1 et x_2 sont des constantes à trouver, qui caractérisent l'intensité réelle des états secondaires.

— Pour déterminer x_1 et x_2, il suffit de remarquer que dans la structure réelle, il ne s'exerce aucune réaction d'appui à l'endroit des blocages simples càd dans chacune des bielles, la somme des efforts normaux étendue aux trois stades F, $x_1 S_1$ et $x_2 S_2$ au droit des bielles doit être nulle !. Si les réactions d'appuis produites aux blocages 1 et 2 (donc en B' et D') s'appellent :

B_1^F et B_2^F dans la résolution F de la structure à noeuds fixes soumise à la sollicitation extérieure donnée,

$B_1^{S_1}$ et $B_2^{S_1}$ dans la résolution S_1 du 1er état secondaire,

$B_1^{S_2}$ et $B_2^{S_2}$ " " S_2 du 2ème " " ,

On doit avoir :

$$\left.\begin{array}{l} B_1^{S_1}\cdot x_1 + B_1^{S_2}\cdot x_2 + B_1^F = 0 \\ B_2^{S_1}\cdot x_1 + B_2^{S_2}\cdot x_2 + B_2^F = 0 \end{array}\right\} \quad (11.15)$$

Ce qui représente un système linéaire de deux équations ~~aux~~ à deux inconnues x_1 et x_2. Les coefficients B sont des réactions d'appui provenant des résolutions F, S_1 et S_2. En vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, on a $B_1^{S_2} = B_2^{S_1}$, càd la matrice des coefficients B est symétrique. Pour éviter toute difficulté de signes, on fixera une convention de signe pour les réactions B.

— De manière générale, l'étude et la solution d'une structure de degré de mobilité égal à p nécessite :

a.- l'étude de la structure fixée sollicitée par les forces extérieures données, puis la détermination de p forces de fixations B_i^F ;

b.- l'examen et la résolution de p états secondaires obtenus en supprimant une seule des p bielles de fixations et en donnant au noeud correspondant un déplacement unitaire, puis la détermination des p^2 (par symétrie $p(p+1)/2$) réactions d'appuis $B_i^{S_j}$;

Au verso →

c.- l'écriture et la résolution d'un système de p équations linéaires à p inconnues x_j :

$$\sum_{j=1}^{p} B_i^{S_j} \cdot x_j + B_i^{F} = 0 \qquad \text{où } i = 1, \dots, p. \qquad (11.16)$$

d.- la superposition à l'état F des p états secondaires S_i multipliés par les p coefficients x_i trouvés par (11.16) ;

$$M = F + \sum_{i=1}^{p} x_i S_i \qquad (11.17)$$

11.9.2. Remarques

a.- Il faut toujours comparer le degré d'indétermination cinématique d'une structure à étudier à son degré d'hyperstaticité, afin de choisir entre la méthode des forces et celle des déplacements celle qui sera la plus commode à appliquer.

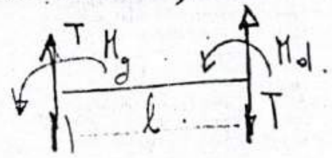
b.- Si après avoir étudié une mise en charge déterminée d'une structure de degré de mobilité p, on doit étudier une autre mise en charge, on peut se servir des p états secondaires déjà étudiés.

c.- Les coefficients x_j sont les déplacements réels des noeuds où se trouvaient des blocages simples.

d.- Dans le cas des portiques multiples à montants verticaux, à 1 niveau fig (11.19)^{bis}, on peut se dispenser de rechercher les efforts normaux ; en effet si l'on adopte une bielle de fixation horizontale, l'équation d'équilibre de translation horizontale du portique s'écrit :

$$\sum_{\text{montants}} T + \sum_{\text{forces}} H + F = 0$$

où T est l'effort tranchant dans un montant,
H la composante horizontale des forces extérieures,
et F la force de fixation.



L'effort tranchant, dans une barre non chargée de longueur l, est donné, avec les signes de Cross ~~(pour les M)~~, par :

$$\boxed{T = -\frac{M_g + M_d}{l}}$$

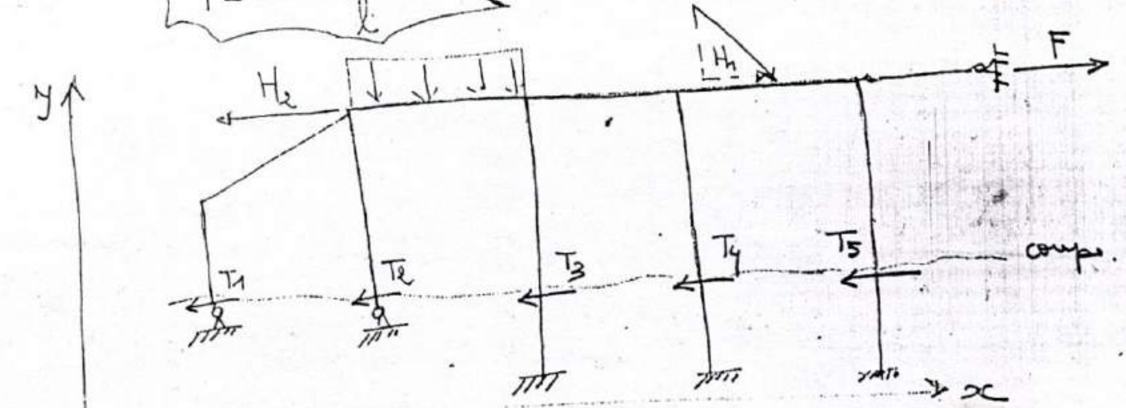


fig (11.19). bis

→ 11.9.3. Autre méthode d'étude des structures à noeuds mobiles, basée sur le principe des travaux virtuels.

Le système d'équations (11.16) en x_j peut s'obtenir directement, sans passer par les efforts normaux, à condition d'utiliser le principe des travaux virtuels.

Dans ce but, introduisons une rotule et une paire de moments (réels) aux deux extrémités de chacune des barres composants la structure, fig (11.20).

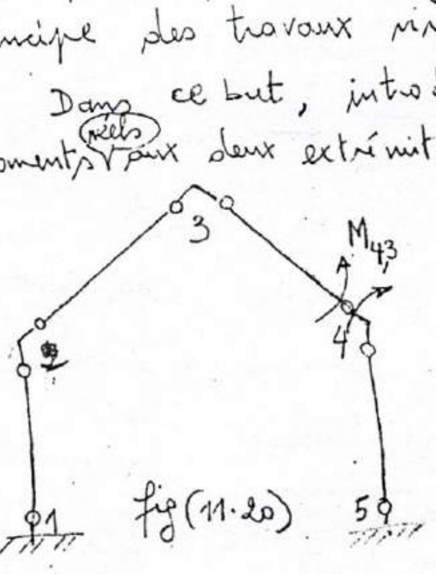


fig (11.20)

On peut considérer les paires de moments agissant sur les lèvres de ces rotules, dans la structure réelle à noeuds mobiles, comme des sollicitations extérieures (connues) appliquées dans une structure isostatique. (Au verso)

La structure articulée 12345, considérée comme composée de barres indéformables, est en équilibre sous les actions des forces extérieures P_1, P_2, P_3, ... et des moments extérieurs $M_{1,2}$, $M_{2,1}$, $M_{2,3}$, $M_{3,2}$, ..., $M_{5,4}$. Par conséquent, en vertu du théorème des travaux virtuels appliqué aux corps indéformables, le travail total des P et des M est égal à zéro pour tout déplacement virtuel de la structure indéformable compatible avec ses liaisons; ce qui s'écrit :

$$\mathcal{T}_P + \mathcal{T}_M = 0 \qquad \cancel{(11.16)}\ (11.18)$$

Comme déplacements virtuels, on choisira ceux qui correspondent aux divers états secondaires.

Marche détaillée des calculs :

– Pour le premier état secondaire, on se donnera arbitrairement la déviation ψ d'une des barres et on en déduira les déviations de toutes les autres barres. Voir fig 11.6.3.

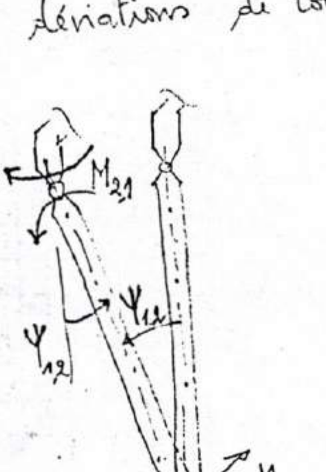


fig (11.21)

La fig (11.21) rappelle les sens positifs des moments et des angles. Si l'on donne à la barre 1-2 la déviation virtuelle positive $\psi_{1,2}$, les moments $M_{1,2}$ et $M_{2,1}$ "noeud sur barre" effectuent le travail

$$(M_{1,2}+M_{2,1})\cdot\psi_{1,2}$$

On obtiendra un terme analogue pour chacune des barres de la structure, de sorte qu'au total on aura :

$$\mathcal{T}_M = \sum_{barres}(M_{ij}+M_{j,i})\cdot\psi_{ij}$$

D'autre part, les forces extérieures produisent, lors du déplacement virtuel considéré, le travail :

$$\mathcal{Z}_p = \sum P . d$$

où d = déplacements des points d'application de ces forces, projetés sur leur direction et comptés positivement dans les sens positifs de ces forces.

L'équation (11.18) s'écrit explicitement :

$$\sum_{\text{barres}} (M_{ij} + M_{ji}) \cdot \psi_{ij}^{(1)} + \sum_{\text{forces ext.}} P . d^{(1)} = 0 \qquad (11.19) \; \cancel{(11.17)}$$

On écrira autant d'équations (11.19) qu'il y a d'états secondaires indépendants, l'indice (1) prenant les valeurs (1), (2), ..., (p).

— Comment déduire de ces équations, les équations en x_j, (11.16) ?

Un moment fléchissant réel quelconque M_{ij} s'obtient au § 11.9.1, par l'équation (11.17), càd en ajoutant, au moment du système à noeuds fixés M_{ij}^f, x_1 fois le moment M_{ij}^1 du 1er état secondaire, x_2 fois le moment M_{ij}^2 du 2e état secondaire, etc.... On a donc

$$M_{ij} = M_{ij}^f + x_1 \cdot M_{ij}^{(1)} + x_2 \, M_{ij}^{(2)} + \dots + x_p \, M_{ij}^{(p)} \qquad (a)$$

En remplaçant les M_{ij} par leurs expressions (a) dans les équations (11.19) et en regroupant les coefficients de $x_1, x_2, \dots$

Au verso.

et les termes indépendants, on obtient le système d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\cdot x_1 + A_{12}\, x_2 + \dots + A_1 = 0 \\ A_{21}\cdot x_1 + A_{22}\, x_2 + \dots + A_2 = 0 \\ - - - - - - - - - - \\ A_{p1}\, x_1 + A_{p2}\, x_2 + \dots + A_p = 0 \end{array}\right\} \quad (11.20)$$

à condition de poser :

$$A_{hk} = \sum_{barres} M^{(k)} \cdot \psi^{(h)}$$

$$A_m = \sum P \cdot d^{(m)} + \sum M^f \cdot \psi^{(m)}$$

les indices h, k, m : $1, 2, \dots, p$. Les coefficients A_{hk} représente le travail des moments des états secondaire (k) pour le déplacement virtuel de l'état secondaire (h). $M^{(k)}$ et M^f sont les Σ des M correspondants aux 2 extrémités de chacun des barres.

D'après le théorème de Betti, on a :

$$\sum M^{(h)} \cdot \psi^{(k)} = \sum M^{(k)} \cdot \psi^{(h)} \quad \text{càd} \quad A_{hk} = A_{kh}.$$

La matrice des coefficients A_{hk} est donc symétrique.

Exercice : Etablissez le système (11.20) dans le cas de 2 degrés de mobilité. cela permettra de comprendre A_{hk} et A_m.

Exemple d'application

Soit à chercher les M dans un shed à noeuds rigides sollicité par la charge d'un pont roulant, fig. (11.22). La structure est à degré de mobilité égal à 2.

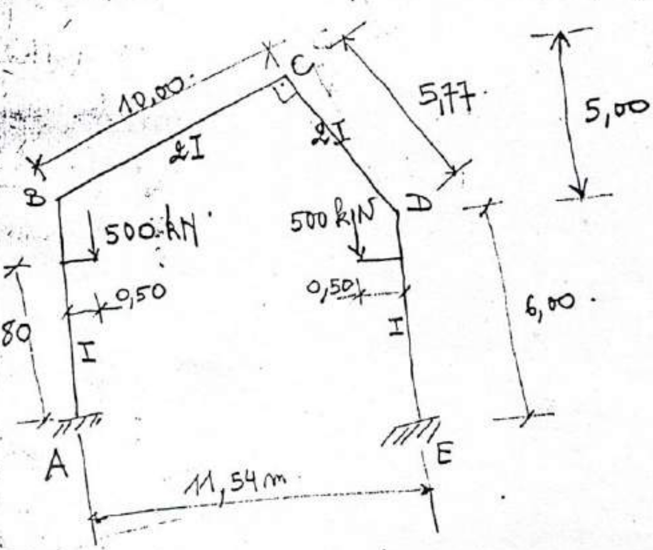
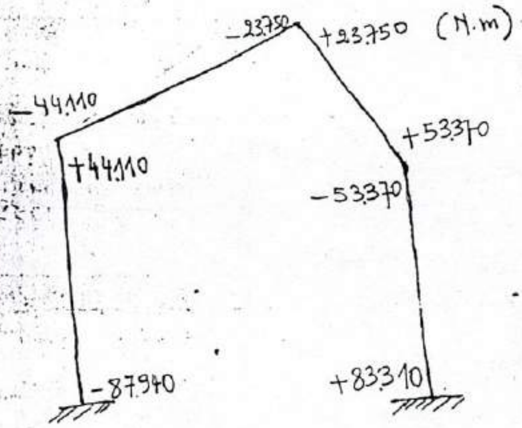


fig (11.22) : cotes en m.

- les M dans la structure à noeuds fixes sont représentés sur la fig. (11.23 a).

- les déviations ψ produites dans le 1er état secondaire, représentées sur la fig (11.23 d), ont été calculées au § 11.6.3 comme exemple d'application. Les M correspondants sont représentés sur la fig (11.23 b), en supposant 2EI = 1.

- les ψ du 2ème état secondaire, voir fig. (11.23 e), et les M correspondant ; fig. (11.23 c).



(a)

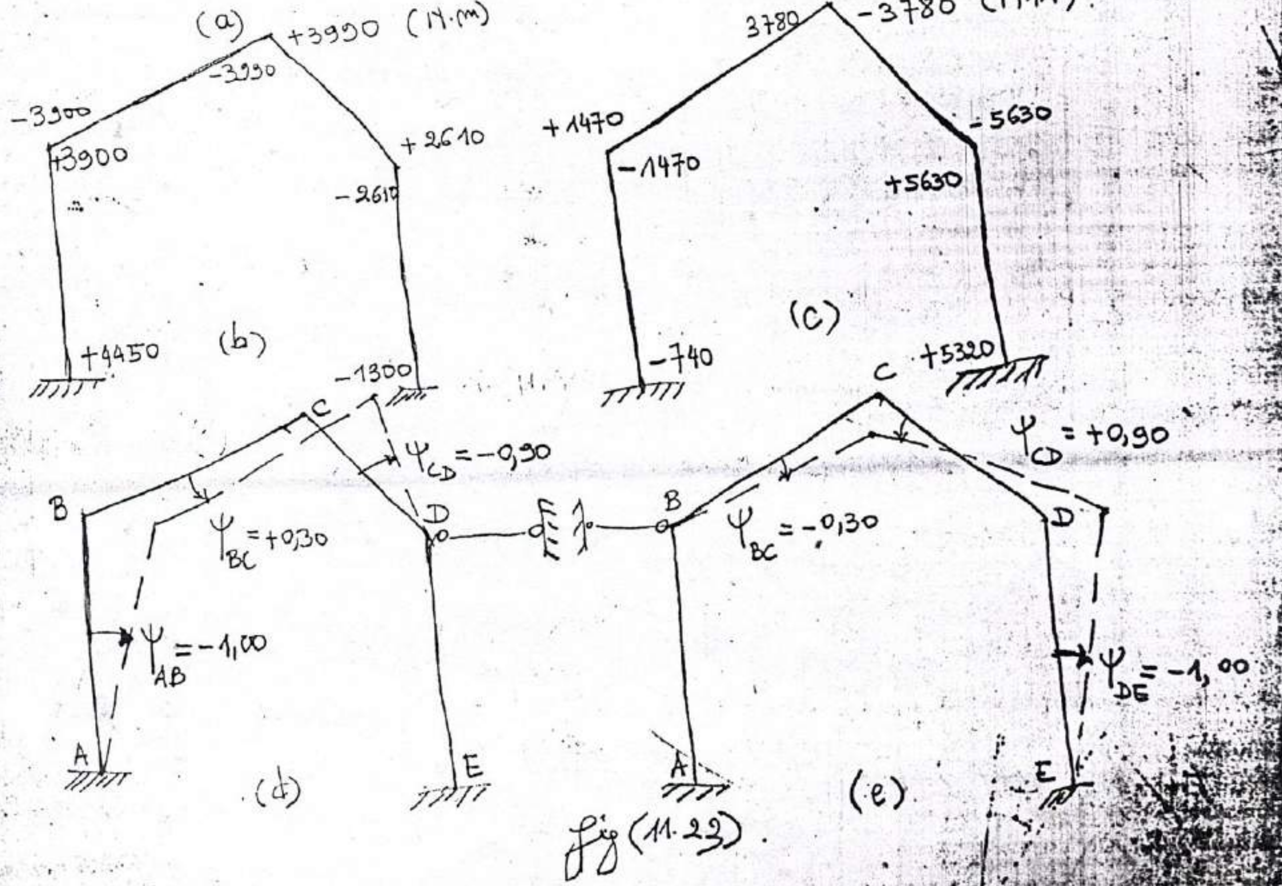
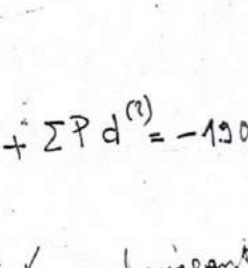


fig (11.22)

– Le calcul des coefficients A_{hk} et A_{mi} des équations (11.20) se dispose dans un tableau, voir ci-dessous. Dans les colonnes 2, 3 et 4, on a la Σ des moments aux 2 extrémités de chacune des barres, d'abord dans la structure à nœuds fixes (colonne 2), puis dans les 2 états secondaires (colonnes 3 et 4). Les déviations ψ des diverses barres dans les 2 états secondaires sont dans les colonnes 5 et 6.

Barre	ΣM^f	$\Sigma M^{(1)}$	$\Sigma M^{(2)}$	$\psi^{(1)}$	$\psi^{(2)}$	$\Sigma M^f \cdot \psi^{(1)}$	$\Sigma M^f \cdot \psi^{(2)}$	$\Sigma M^{(1)} \cdot \psi^{(1)}$	$\Sigma M^{(1)} \cdot \psi^{(2)} = \Sigma M^{(2)} \cdot \psi^{(1)}$	$\Sigma M^{(2)} \cdot \psi^{(2)}$
AB	− 43830	+ 8350	− 2210	− 1,00	0,00	+ 43830	—	− 8350	—	—
BC	− 67860	− 7890	+ 5250	+ 0,30	− 0,30	− 20350	+ 20350	− 2365	+ 2370	− 1580
CD	+ 77120	+ 6600	− 9410	− 0,90	+ 0,90	− 69500	+ 69500	− 5940	+ 5940	− 8470
DE	+ 29940	− 3910	+ 10950	0,00	− 1,00	—	− 29940	—	+ 3910	− 10950
						$\Sigma = -45920 = A_1 - \Sigma P d^{(1)}$	$\Sigma = 59910 = A_2 - \Sigma P d^{(2)}$	$\Sigma = -16655 = A_{11}$	$\Sigma = 12220 = A_{12} = A_{21}$	$\Sigma = -21000 = A_{22}$

Par ailleurs, on a :



$x = 0{,}5 \cdot \sin\psi$
$= 0{,}5 \cdot \psi$.

$$\Sigma P \cdot d^{(1)} = 500\,000 \times \psi_{AB} \times 0{,}5 = +250.000 \text{ N.m}$$

$$\Sigma P \cdot d^{(2)} = -500.000 \times \psi_{DE} \times 0{,}5 = -250.000 \text{ N.m.}$$

Les termes indépendants de (11.18) valent donc :

$$A_1 = -45920 + \Sigma P \cdot d^{(1)} = 204080 ; \quad A_2 = +59910 + \Sigma P d^{(2)} = -190090.$$

Le système d'équations (11.20) en x_1, x_2 s'écrit (en changeant de signes) :

$$\begin{cases} 16655\, x_1 - 12220\, x_2 - 204080 = 0 \\ -12220\, x_1 + 21000\, x_2 + 190090 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = +9{,}78 \text{ et } x_2 = -3{,}38, -$$

La distribution réelle des M dans la structure à noeuds mobiles s'obtient en additionnant aux moments du schéma (a) de la fig. (11.23), x_1 fois ceux du schéma (b) et x_2 fois ceux du schéma (c).

On obtient ainsi, fig. (11.24) :

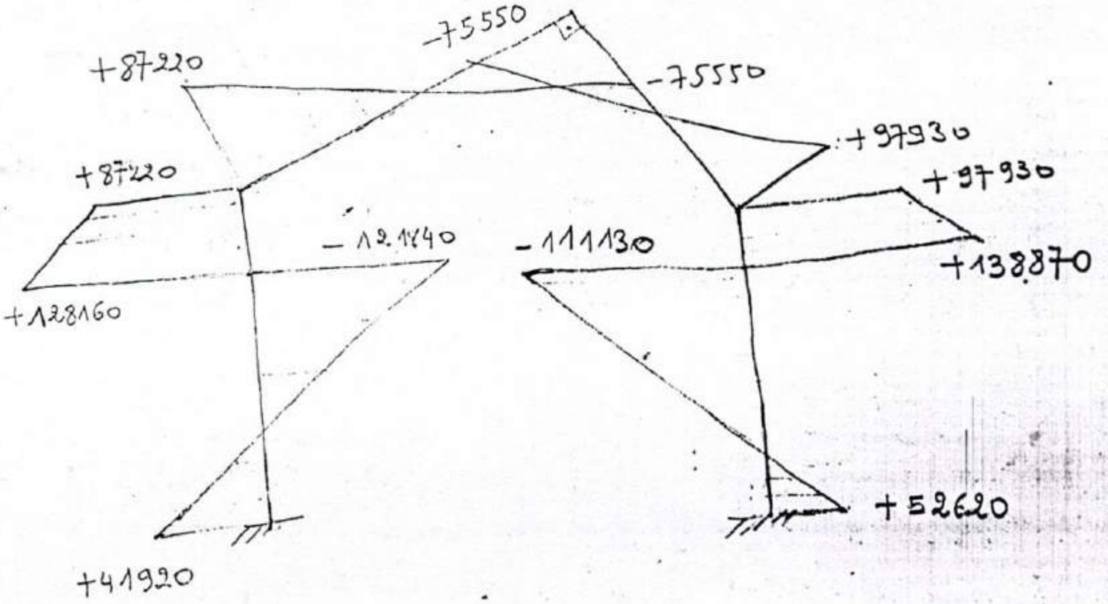


fig (11.24) : ii N.m

11.9.6. Recherche des lignes d'influence des M, N, T. voir page 122.

11.9.5. Méthode (de Van Russelt) spéciale pour déterminer les efforts dans les portées symétriques et poutres Vierendeel à hauteur constante symétrique.

A. Généralités

L'étude par la méthode générale exposée au § 11.8 de la portée symétrique (à 2 files de colonnes) de la fig. (11.25a), chargée de forces transversales en ses noeuds, exige l'introduction de 4 forces de fixation, puis la détermination de 4 états secondaires, ensuite la résolution d'un système de 4 éq. à 4 inconnues et enfin l'établissement de la sollicitation réelle par superposition des 4 états secondaires, multipliés par des coefficients adéquats.

11.10. RECHERCHE DES LIGNES D'INFLUENCE DES M, N, T.

11.10.1. - *METHODE PARTICULIERE POUR LES STRUCTURES A NOEUDS FIXES.* -

La méthode générale ~~rappelée~~ basée sur le théorème de LAND ~~ci-dessus~~ convient lorsqu'on ne cherche qu'une ligne d'influence déterminée. Mais, lorsqu'on désire tracer simultanément les lignes d'influence des moments de toutes les sections, il est préférable d'adopter un autre procédé qui est l'analogue complet de celui exposé dans la méthode des rotations.

Ce procédé repose sur la remarque suivante :

Pour étudier le moment en C sous l'effet d'une force unitaire placée sur une travée déterminée (AB par exemple) (figure 11.25.a) on doit, d'après la méthode de Cross, calculer les moments d'encastrement parfait

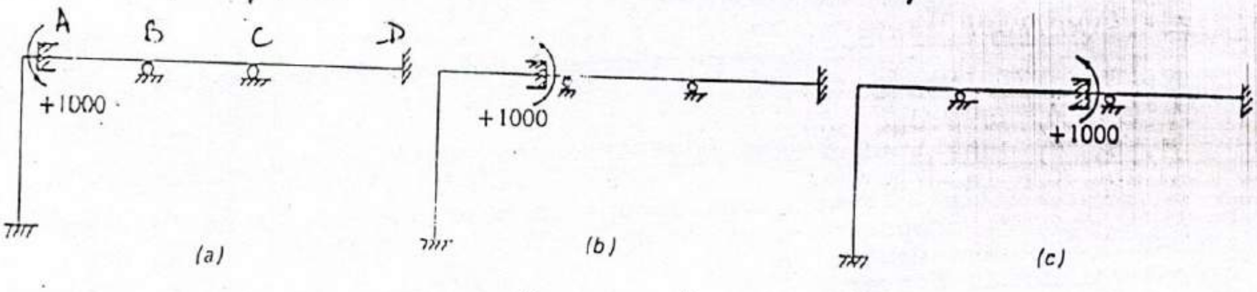
$$\varepsilon_g = + \frac{x\, x'^2}{l^2} \quad , \qquad \varepsilon_d = - \frac{x^2\, x'}{l^2}$$

~~évoqués~~ induits par cette force dans la barre AB, puis les distribuer dans toute la structure selon le procédé ~~exposé aux paragraphes~~ de CROSS
Il revient évidemment au même d'étudier séparément l'effet du moment ε_g seul, puis celui de ε_d seul, puis enfin d'additionner les résultats.

En pratique on procède comme suit :

a) On applique à l'extrémité g de la barre AB un moment + 1000 ; le moment ~~évoqué~~ induit en C vaut M_c^g (figure 11.25.a).

b) On applique à l'extrémité d de la barre AB un moment + 1000, le moment ~~évoqué~~ induit en C vaut M_c^d (figure 11.25.b).



~~Fig. 4.17.3.~~ Fig (11.25)

Le moment réel en C sous l'effet de la force unitaire vaut donc :

$$M_C = \varepsilon_g^{AB} \frac{M_c^g}{1000} + \varepsilon_d^{AB} \frac{M_c^d}{1000} \qquad (11.21)$$

Le raisonnement que nous venons de faire pour le moment sur l'appui C est évidemment valable pour n'importe quel effet M , N ou T ~~évoqué~~ induit dans le système. On a donc la formule générale :

$$\boxed{E = \varepsilon_g^{AB} \frac{E^g}{1000} + \varepsilon_d^{AB} \frac{E^d}{1000}} \qquad \begin{matrix}(11.22)\\ (\cancel{4.17.2})\end{matrix}$$

où E est un effet quelconque,

E^g la valeur que prend cet effet pour un moment + 1000 appliqué à l'extrémité g de AB ,

E^d la valeur que prend cet effet pour un moment + 1000 appliqué à l'extrémité d de AB .

Dans ce procédé ~~actuel~~, il faut en principe exécuter un nombre de schémas de Cross égal à deux fois le nombre de barres parcourues par la force mobile. Cependant, certains des schémas se réduisent à zéro. D'autres font double emploi,(car la sollicitation générale de la structure sous l'effet d'un moment extérieur + 1000 appliqué en un noeud est la même quelle que soit la barre de ce noeud qui est sollicitée). impt.

Ainsi, dans la structure de la figure (11.25) ~~4.17.1~~, il suffit d'étudier les trois sollicitations ~~suivantes (figures 4.17.3)~~. présentées.

11.10.2 ~~4.17.3~~.- *METHODE PARTICULIERE POUR LES STRUCTURES A NOEUDS MOBILES*.-

Pour fixer les idées, considérons le portique double de la figure 11.26.a.1, et proposons-nous de déterminer les lignes d'influence des M, N, T, dans toutes les barres, sous l'effet d'une charge P = 1t. circulant sur la traverse 2-3.

On commence par fixer les noeuds de la structure par deux bielles attelées aux noeuds 2 et 6 .

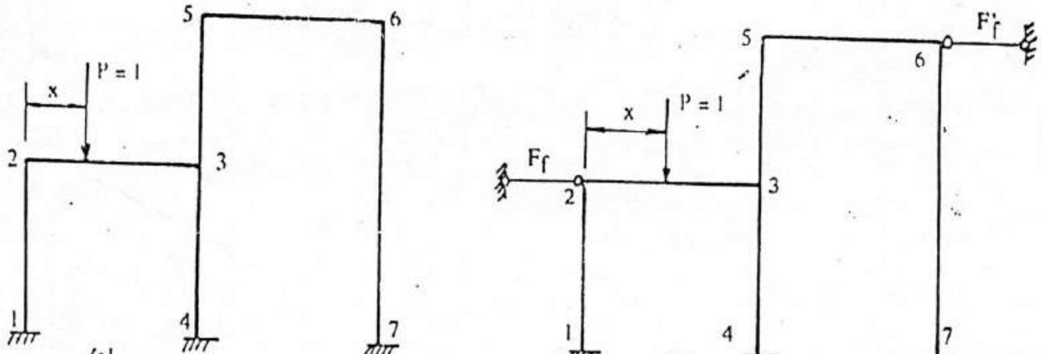


Fig: 11.25

... fois pour toutes les unités ...

On étudie la construction à noeuds fixés de la manière exposée ci-dessus, ce qui donnera l'expression des M , N , T , et des efforts de fixation F_f et F'_f en fonction de l'abscisse de la force.

On étudie ensuite les deux états secondaires obtenus en enlevant l'une ou l'autre bielle. L'effet considéré (par exemple le moment fléchissant dans la section 4) est proportionnel à la force de déviation.

Appelons $E_{secondaire}$ et $E'_{secondaire}$ les effets produits par des forces unitaires appliquées en 2 et en 6 respectivement dans le sens opposé à F_f ou F'_f. Désignons d'autre part par $E_{fixé}$ l'effet produit dans le système à noeuds fixés.

Avec ces notations, le principe de superposition des effets permet d'écrire :

$$\text{Li } E_{réel} = \text{Li } E_{fixé} + E_{secondaire} \text{ Li } F_f + E'_{secondaire} \text{ Li } F'_f \qquad (11.23) \quad \cancel{(4.17.3)}$$

Cette formule résout le problème posé en toute généralité.

*
** **

124

CHAPITRE ~~II~~ 12

SYMETRIES ET ANTIMETRIES

12.1.- STRUCTURES SYMETRIQUES ET PROCEDE DE DECOMPOSITION DES CHARGES.-

On sait que plus le nombre d'inconnues d'une structure est élevé, plus la résolution des équations résolvant cette structure est pénible, et plus grande doit d'ailleurs être la précision des calculs, à cause du phénomène d'accumulation des erreurs.

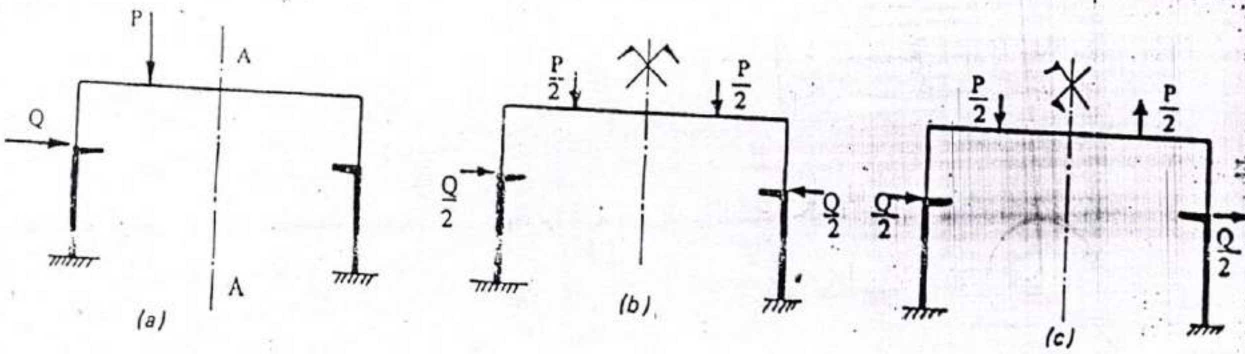
Il y a donc grand intérêt à diviser, quand on le peut, le système linéaire en deux ou plusieurs groupes indépendants comprenant chacun beaucoup moins d'inconnues. Dans le cas des *structures symétriques*, cela peut se faire en utilisant le *procédé de décomposition des charges*, dû à ANDREE.

Par *structure symétrique*, on entend une structure présentant par rapport à un ou plusieurs axes *(ou un ou plusieurs plans)* une symétrie *complète* de géométrie *(forme, longueurs, sections, moments d'inertie, etc.)*. Dans la suite de ce chapitre, on se bornera à nouveau à l'étude des structures situées et chargées dans un plan, mais les considérations qui suivent sont valables pour n'importe quelle structure.

Le *procédé de décomposition des charges* consiste à décomposer la sollicitation extérieure en deux sollicitations, l'une *symétrique* et l'autre *antimétrique par rapport à l'élément (axe ou plan) de symétrie*, à analyser ces deux sollicitations partielles *séparément*, puis enfin à *additionner leurs effets*.

Application.

Considérons le portique de la figure ~~5.1.1.a~~ (12.1a), qui est géométriquement symétrique par rapport à l'axe AA, mais chargé de façon quelconque.



~~Fig. 5.1.1.~~
Fig (12.1)

Décomposons la sollicitations (P, Q) en une sollicitation symétrict P/2, Q/2, - Q/2 ; *figure b)* et une sollicitation antimétrique (P/2 -P/2, Q/2, Q/2 ; *figure c)* par rapport à l'axe AA. Il est évident l'on a :

sollicitation réelle = soll. symétrique + soll. antimétrique

en vertu du principe de superposition. On remarquera que :

a.- une sollicitation est symétrique, si, lorsqu'on *retourne* la structure et ses charges par rapport à l'élément de symétrie, on obti *la même situation* qu'avant retournement ;

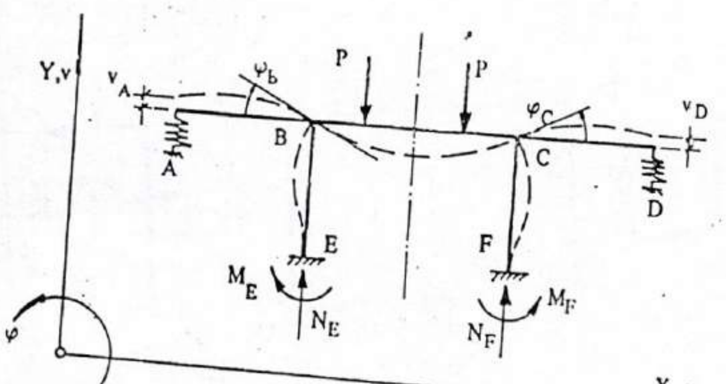
b.- une sollicitation est antimétrique si, quand on *retourne* la structure et ses charges par rapport à l'élément de symétrie et que l superpose ce cas à la situation initiale, on obtient une *structure no chargée.*

Dans la suite, on parlera de *systèmes* symétriques ou antimétriq. le mot système désignant pour simplifier la structure *(supposée géomé: quement symétrique)* et ses charges.

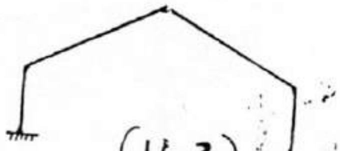
12.2.- EFFET DES SYMETRIES ET ANTIMETRIES SUR LES GRANDEURS MECANIQUES ET GEOMETRIQUES.-

12.2.1.- *SYSTEMES SYMETRIQUES.*

Les efforts intérieurs et déplacements de deux sections disposée: symétriquement sont évidemment symétriques, c'est-à-dire égaux et opposés ; cependant pour être symétriques, les déplacements et efforts inté rieurs parallèles à l'axe de symétrie sont égaux et de même sens.



(12.2)
Fig. ~~5.2.1.~~



(12.3)
Fig. ~~5.2.2.~~

Fig. ~~5.2.3.~~
(12.4)

Ainsi, dans le portique de la figure ~~5.2.1~~ 12.2, on a :

$$M_E = - M_F \quad \text{et} \quad N_E = N_F$$
$$\varphi_B = - \varphi_C \quad \text{et} \quad v_A = v_D$$

Si une barre *traverse* un axe de symétrie, on a, *sur l'axe de symétrie (figure ~~5.2.1~~ 12.2, barre* BC) :

$$\left.\begin{array}{l} T = 0 \;,\; M \neq 0 \;\text{ et }\; N \neq 0 \\ v \neq 0 \;,\; \varphi = 0 \;\text{ et }\; u = 0 \end{array}\right\} \quad * \qquad (12.1) \;\; (\cancel{5.2.1})$$

Il en est de même si un noeud se trouve sur l'axe de symétrie (*fig.* ~~5.2.3~~ 12.3). Dans ce cas, N et T sont les composantes parallèles à X et Y.

Si une barre *se trouve* sur l'axe de symétrie, on a, tout le long de cette barre (*fig.* ~~5.2.3~~ 12.4) :

$$\left.\begin{array}{l} T = 0 \;,\; M = 0 \;,\; N \neq 0 \\ v \neq 0 \;,\; \varphi = 0. \;,\; u = 0 \end{array}\right\} \qquad (12.2) \;\; (\cancel{5.2.2})$$

12.2.2.- *SYSTEMES ANTIMETRIQUES.*

Les efforts intérieurs et déplacements de deux sections disposées symétriquement sont antimétriques, c'est-à-dire égaux et de même sens ; cependant, pour être antimétriques, les déplacements et efforts intérieurs parallèles à l'axe sont égaux et de sens opposés.

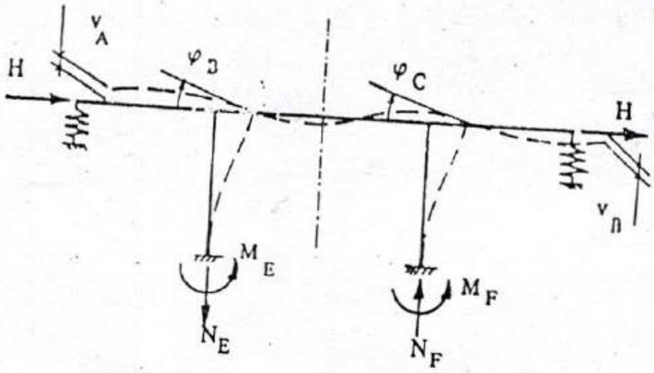


Fig. ~~5.2.4.~~ (12.5)

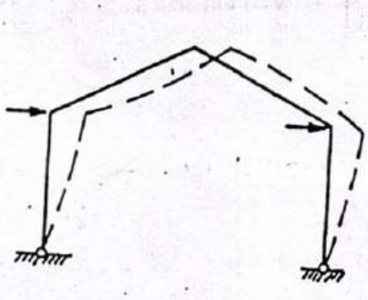


Fig. ~~5.2.5.~~ (12.6)

Pour le même portique que précédemment, mais antimétriquement chargé (*fig.* ~~5.2.4~~ (12.5)), on a :

$$M_E = M_F \quad \text{et} \quad N_E = - N_F$$
$$\varphi_B = \varphi_C \quad \text{et} \quad v_A = - v_B$$

Si une barre traverse un axe d'antimétrie, on a, sur l'axe d'antimétrie *(fig. ~~5.2.4~~ 12.5 barre* BC*)* :

$$T \neq 0 \;,\; M = 0 \quad \text{et} \quad N = 0 \quad [M_t \neq 0] \qquad (12.3)\ (\cancel{5.2.3})$$
$$v = 0 \;,\; \varphi \neq 0 \quad \text{et} \quad u \neq 0$$

Il en est de même si un noeud se trouve sur cet axe *(fig. ~~5.2.5~~ 12.6)*. Dans ce cas, N et T sont les composantes parallèles à X et Y.

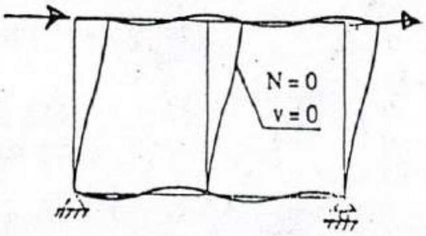


Fig. ~~5.2.6~~. (12.7)

Si une barre est située sur un axe d'antimétrie, on a, dans cette barre *(fig. ~~5.2.6~~ 12.7)* :

$$T \neq 0 \;,\; M \neq 0 \quad \text{et} \quad N = 0 \qquad (12.4)\ (\cancel{5.2.4})$$
$$v = 0 \;,\; \varphi \neq 0 \quad \text{et} \quad u \neq 0$$

Toutes les propriétés énoncées ci-dessus se démontrent sans difficulté par le principe du *retournement* donné au paragraphe précédent.

12.3.- EMPLOI DES SYMETRIES ET ANTIMETRIES DANS LA METHODE DES FORCES.-

Pour fixer les idées, considérons le portique triple symétrique, représenté à la figure ~~5.3.3~~ 12.8, rendu isostatique par trois coupures triples disposées symétriquement (n = 9).

Envisageons d'abord la *sollicitation symétrique (fig. ~~5.3.4~~ 12.9)*. On a dans ce cas :

$$X_5 = 0$$
$$X_1 = X_7 \;;\; X_2 = X_8 \;;\; X_3 = X_9$$

de sorte qu'il n'y a plus que $n_s = 5$ inconnues.

Dans le cas de la *sollicitation antimétrique (fig. ~~5.3.5~~ 12.10)*, on a :

$$X_4 = 0 \;;\; X_6 = 0$$
$$X_1 = -X_7 \;;\; X_2 = -X_8 \;;\; X_3 = -X_9$$

et il reste donc $n_a = 4$ inconnues.

Il est évident qu'il est plus simple de résoudre deux systèmes d'équations, l'un à cinq et l'autre à quatre inconnues, qu'un système complet à neuf inconnues. Enfin, la préparation de ces deux systèmes a des points communs, ce qui simplifie encore le travail.

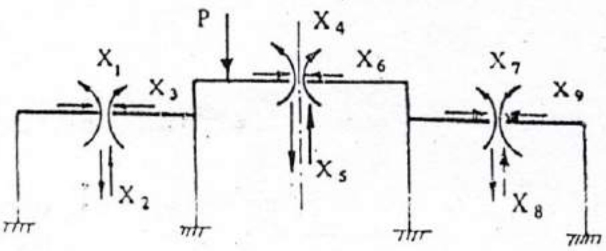


Fig. ~~5.3.1.~~ 12.8

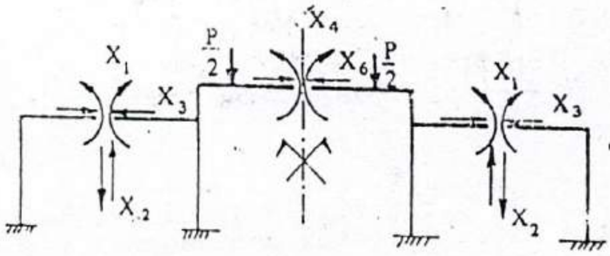


Fig. ~~5.3.2.~~ 12.9

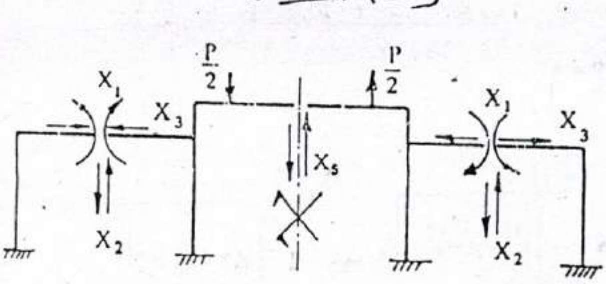


Fig. ~~5.3.3.~~ 12.10

Ces considérations suffisent à démontrer l'intérêt que l'on peut tirer des structures symétriques et de la méthode par décomposition des charges. On peut donc toujours remplacer l'étude d'une structure symétrique de degré d'hyperstaticité n par l'étude de deux structures de degré d'hyperstaticité inférieur, l'une symétriquement chargée *(degré* n_s*)* et l'autre antimétriquement *(degré* n_a*)*. On a évidemment $n = n_a + n_s$ et souvent $n_a \simeq n_s \simeq n/2$.

Enfin, si on désire augmenter le nombre de coefficients de flexibilité f_{ij} nuls, on peut appliquer la méthode de décomposition des charges aux inconnues hyperstatiques elles-mêmes. On peut, en effet, toujours substituer à deux inconnues de même type X_i et X_j agissant sur deux coupures symétriquement disposées, deux autres inconnues, l'une provoquant un état de charge unitaire symétrique, l'autre antimétrique. Il suffit pour cela de prendre comme première inconnue le *groupe* (¹) G_s = $(X_i = 1, X_j = 1)$ et comme seconde, le groupe $G_a = (X_i = 1, X_j = -1)$. Il y a avantage à effectuer la substitution ci-dessus quand les diagrammes unités relatifs à X_i et X_j interfèrent et donnent lieu à des coefficients f_{ij} non nuls. En effet, le coefficient Δ_{ij} relatif aux nouvelles inconnues G_s et G_a est nécessairement nul comme étant l'intégrale, sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine, du produit d'une fonction paire par une fonction impaire.

Il est évident qu'il revient au même de remplacer l'étude de la structure complète par celle d'une demi-structure, en introduisant à l'axe de symétrie des liaisons convenables, réalisant les conditions mécaniques et cinématiques mises en évidence au § 12.2. Ainsi, l'étude du système symétrique, respectivement antimétrique, de la figure ~~5.3.2~~ 12.9, respectivement ~~5.3.3~~ 12.10, est identique à l'étude des deux demi-structures suivantes *(fig.* ~~*5.3.4*~~ 12.11 *a, respectivement b)* :

~~(¹) *La notion de groupes de forces sera examinée au chapitre suivant.*~~

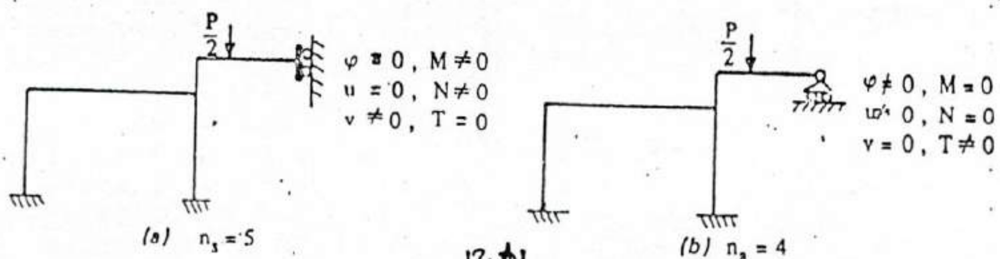


Fig. 12.11 ~~5.3.4.~~

Si la structure comporte une barre située sur l'axe de symétrie géométrique, on remplace cette barre par deux demi-barres identiques, mais infiniment voisines, ce qui ne change rien ni à l'équilibre des forces, ni à la compabilité des déplacements de la structure. ~~On est ainsi ramené au cas d'un noeud placé sur l'axe de symétrie.~~ L'exemple suivant *(fig. ~~5.3.5~~ 12.12)* illustre cette technique.

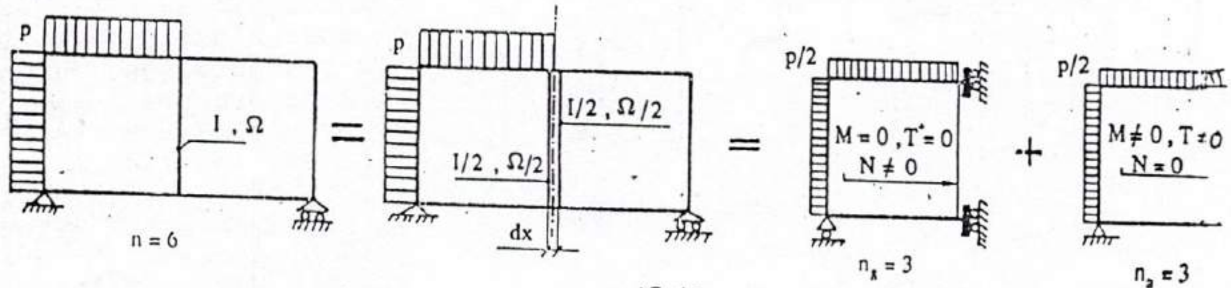


Fig. 12.12 ~~5.3.5.~~

12.4.- EMPLOI DES SYMETRIES ET ANTIMETRIES DANS LA METHODE DES DEPLACEMENTS

On peut développer dans ce cas des considérations exactement analogues à celles relatives à la méthode des forces ~~(§ 5.3 ci-dessus)~~; aussi ne le ferons-nous pas.

Examinons par contre comment tirer profit des simplifications apportées par les symétries et antimétries dans la méthode de Cross. Dans ce but, on examinera successivement les quatre cas suivants :

A.- Systèmes symétriques :
- a.- l'axe de symétrie contient les noeuds médians ;
- b.- l'axe de symétrie coupe les barres médianes en leur milieu ;

B.- Systèmes antimétriques :
- a.- l'axe de symétrie contient les noeuds médians ;
- b.- l'axe de symétrie coupe les barres médianes en leur milieu.

Aa.- L'axe de symétrie passe par les noeuds médians.

Les noeuds situés sur l'axe de symétrie ne tournent pas, par symétrie (*fig.* ~~5.4.1~~ 12.13*.a*). On peut donc supposer toutes les poutres encastrées à ces noeuds (*fig.* ~~5.4.1~~ 12.13 *b*). D'où la

REGLE 1 : Faire le schéma de CROSS pour la moitié gauche (ou droite) du système, en supposant les barres encastrées le long de l'axe de symétrie.

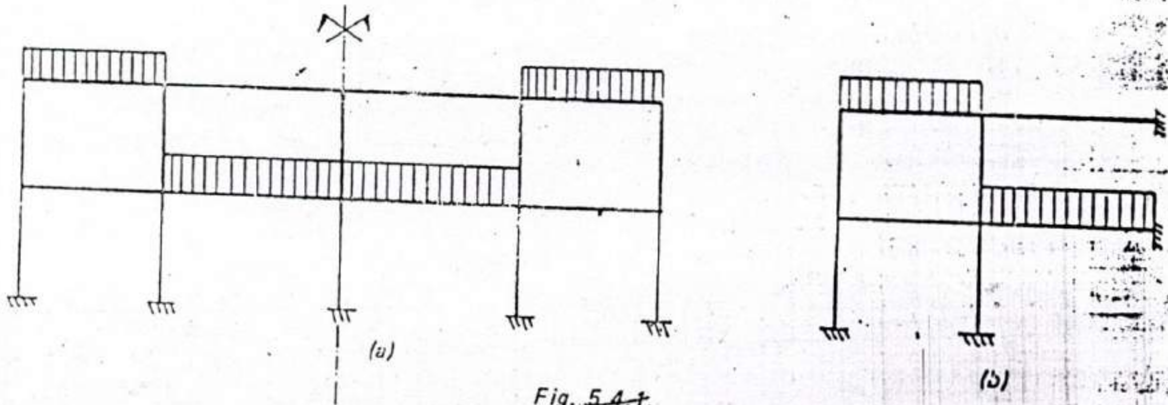


Fig. ~~5.4.1~~ 12.13

Ab.- L'axe de symétrie coupe les poutres médianes en leurs milieux.

On commence par calculer les moments d'encastrement parfait sur le système réel.

Envisageons alors une barre coupant l'axe de symétrie (*fig.* 12.14 *b*). Une telle barre est toujours soumise, à ses extrémités, à deux moments égaux et opposés. Si on réalise le schéma de Cross symétriquement, c'est-à-dire si on libère toujours deux noeuds symétriques simultanément, *il n'y a pas de transmission de moment* le long de cette barre.

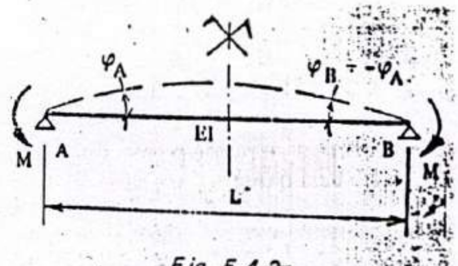


Fig. ~~5.4.2.~~ 12.14

D'autre part, le coefficient de rigidité k_{AA} d'une telle barre vaut :

$$k_{AA} = M/\varphi_A = \frac{2EI.M}{L.M} = \frac{2EI}{L} = R$$

c'est-à-dire la *moitié* du coefficient de rigidité réel ($4EI/L = 2R$).

D'où la :

REGLE 2 : Après avoir calculé les moments d'encastrement parfait sur le système réel, faire le CROSS pour la partie située à gauche (ou à droite) de l'axe de symétrie en attribuant aux demi-barres médianes une raideur égale à la moitié de leur raideur réelle et en ne transmettant aucun moment le long de ces barres.

Exemple numérique.

Soit à calculer la répartition des moments dans le portique tripl représenté à la figure ~~5.4.3.a.~~ 12.15a. Toutes les raideurs sont égales.

On suppose que l'on a $p.l^2/12 = 100$.

D'après la règle ci-dessus, on envisage seulement la moitié du portique en attribuant aux demi-barres médianes une raideur R/2 . De ce fait les coefficients de partage des moments au noeud B sont 0,4 ; 0,4 ; 0,2 . La figure b reproduit les calculs et les valeurs des moments aux extrémités des barres.

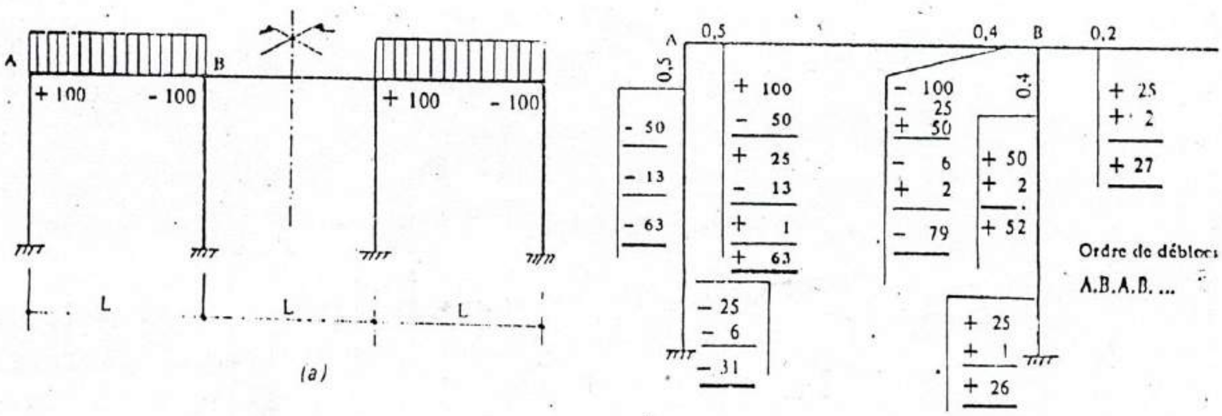


Fig. ~~*5.4.3.*~~ 12.15

B.- *Systèmes antimétriques.*

Ce cas se rencontre fréquemment dans les structures symétriques soumises à la poussée horizontale du vent. En effet, à cause de l'incompressibilité des barres, on ne change rien à la distribution des moments en répartissant les efforts horizontaux par moitiés aux noeuds symétriques, comme le montre la figure ~~5.4.4.a.~~ 12.16a

Ba.- *L'axe du système passe par les noeuds médians.*

On ne change rien à l'équilibre de l'ossature en remplaçant chaque colonne médiane par deux colonnes infiniment rapprochées possédant chacune une raideur moitié moindre (*figures* ~~*5.4.4*~~ 12.16 *.a et b).*

Par raison d'antimétrie, les traverses présentent toutes un point d'inflexion au milieu de l'intervalle dx compris entre ces colonnes. On peut donc, sans rien changer à l'équilibre des *moments*, couper l'ossature en ces points et n'en considérer que la moitié. En effet, les efforts tranchants verticaux existant en ces points d'inflexion sont repris directement par les colonnes médianes et n'occasionnent aucun moment fléchissant dans l'ossature.

D'où la :

REGLE 4 : Après avoir déterminé les moments d'encastrement parfait sur le système réel, faire le CROSS pour la partie située à gauche (ou droite) de l'axe de symétrie, en attribuant aux demi-barres médianes la raideur propre, égale aux 3/2 de la raideur de la barre entière.

Exemple numérique.

Soit à calculer la répartition des moments dans le portique triple ci-dessus (*fig.* ~~12.17~~) soumis à la poussée horizontale P du vent. (suppose que les raideurs de toutes les barres sont les mêmes et que le moments d'encastrement parfait 3.R.Ψ dans les colonnes valent 100.

Il suffit de faire le Cross pour la moitié gauche du portique (*fig* ~~5.4.6~~ 12.18) pour résoudre le problème. Au noeud B , on a :

$$R_I = R_{II} = R \; ; \; R_{III} = 3.\frac{R}{2}.$$

Les coefficients de partage sont donc 2/7 , 2/7 et 3/7.

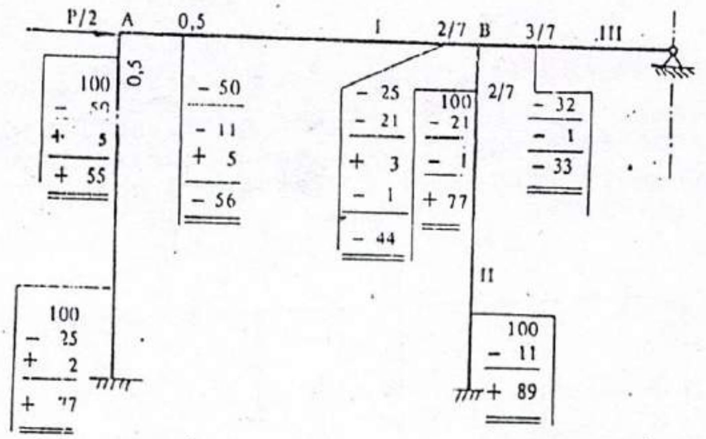


Fig. ~~5.4.6.~~ 12.18

*

** **

REGLE 3 : *Faire le* schéma de *CROSS pour la partie située à gauche (ou à droite) de l'axe de symétrie, en attribuant aux colonnes médianes une raideur égale à la moitié de leur raideur réelle.*

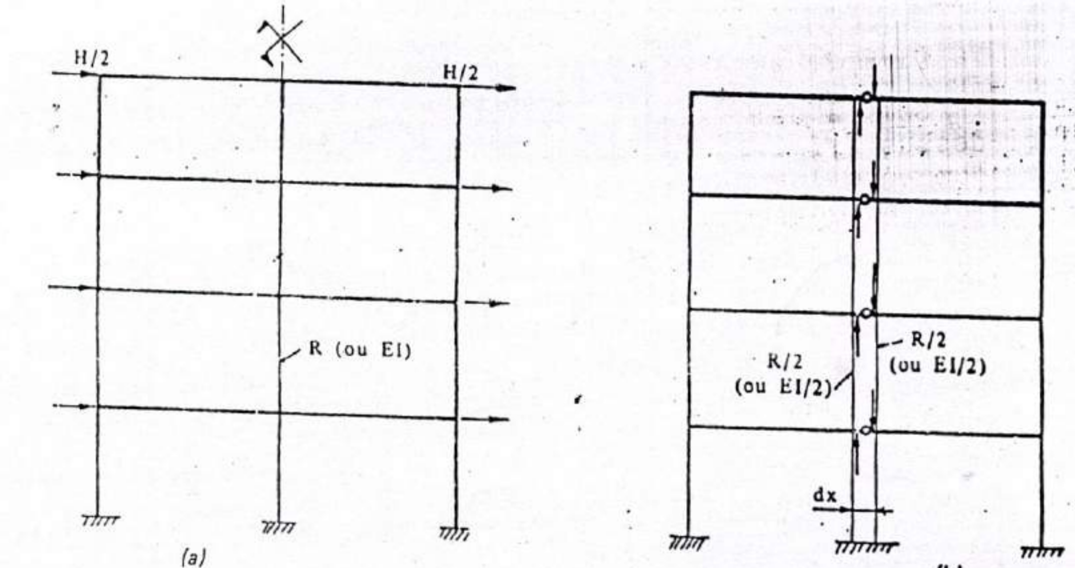


Fig. ~~*5.4.4.*~~ 12.16

Nb.- *L'axe de symétrie coupe les barres médianes en leurs milieux.*

On sait par ce qui précède qu'il suffit de traiter la demi-structure obtenue en appuyant simplement sur rouleau les points milieux des barres médianes (*fig.* ~~*5.3.4.b*~~ 12.14b *et* ~~*5.4.5*~~ 12.17*.a et b).*

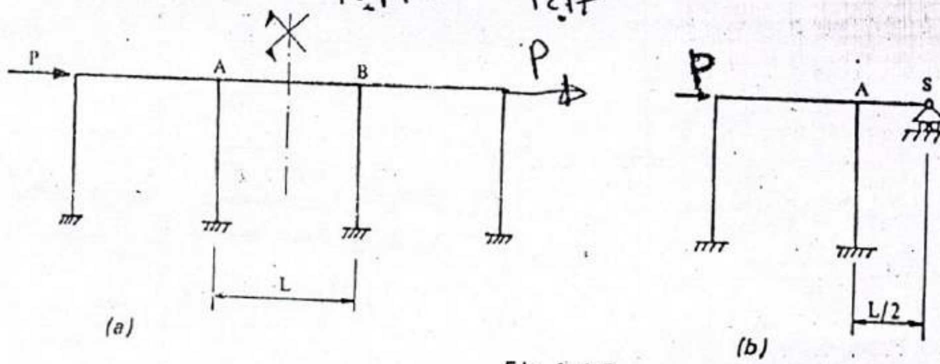


Fig. ~~*5.4.5.*~~ 12.17

Le coefficient de rigidité de la barre AS est : $k_{AA} = \frac{3EI}{(L/2)} = \frac{6EI}{L}$, celui de la barre AB étant $4EI/L$, on voit que :

$$R_{AS} = 1,5.R_{AB}$$

d'où la

- 112 -

Joel BENI

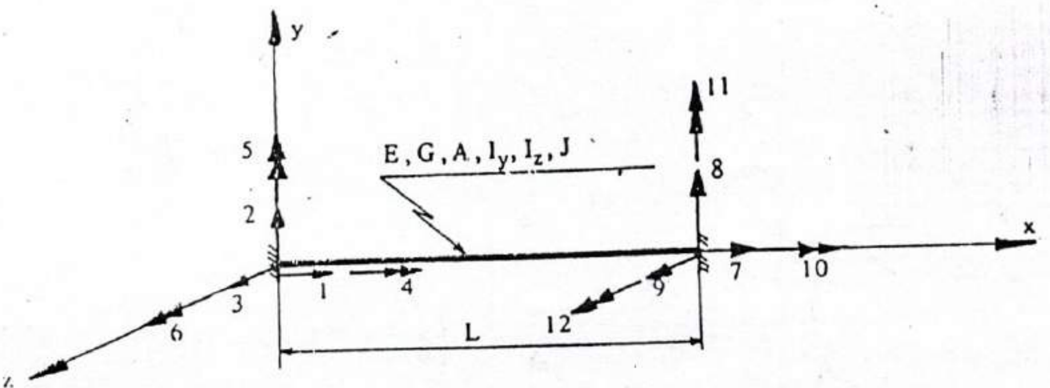
Annexe

ANNEXE

METHODE DES DEPLACEMENTS

VALEUR DES COEFFICIENTS DE RIGIDITE k_{ij} DES BARRES (MATRICES [k])

TABLE 1 – BARRE SPATIALE BI-ENCASTREE – SYSTEME D'AXES LOCAL xyz



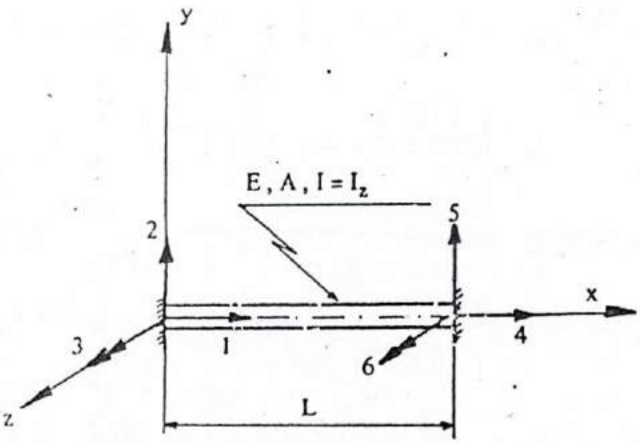
$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} & k_{i7} & k_{i8} & k_{i9} & k_{i10} & k_{i11} & k_{i12}
\end{array}\\
[k] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3}z & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2}z & 0 & \frac{-12EI}{L^3}z & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2}z \\
0 & 0 & \frac{12EI}{L^3}y & 0 & -\frac{6EI}{L^2}y & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI}{L^3}y & 0 & \frac{-6EI}{L^2}y & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2}y & 0 & \frac{4EI}{L}y & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2}y & 0 & \frac{2EI}{L}y & 0 \\
0 & \frac{6EI}{L^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L}z & 0 & \frac{-6EI}{L^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L}z \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3}z & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2}z & 0 & \frac{12EI}{L^3}z & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2}z \\
0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3}y & 0 & \frac{6EI}{L^2}y & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3}y & 0 & \frac{6EI}{L^2}y & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2}y & 0 & \frac{2EI}{L}y & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2}y & 0 & \frac{4EI}{L}y & 0 \\
0 & \frac{6EI}{L^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{L}z & 0 & \frac{-6EI}{L^2}z & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{L}z
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Guy. Vimond

A.2

TABLE 2 - BARRE BI-ENCASTREE D'UNE STRUCTURE PLANE CHARGEE DANS SON PLAN

A) SYSTEME D'AXES LOCAL xy

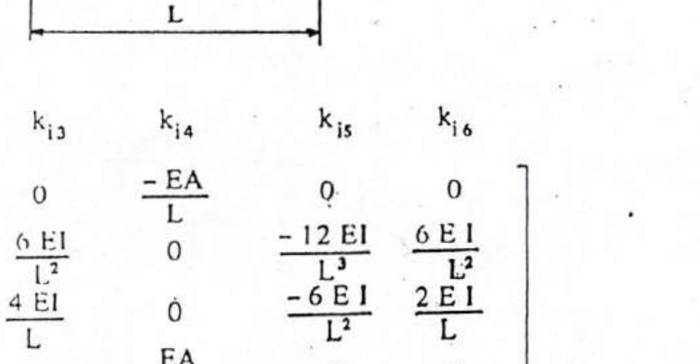


$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \end{array} \\
[k] = & \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

B) SYSTEME D'AXES GLOBAL XY

$C = \cos\ \alpha$

$S = \sin\ \alpha$



JOEL BENI

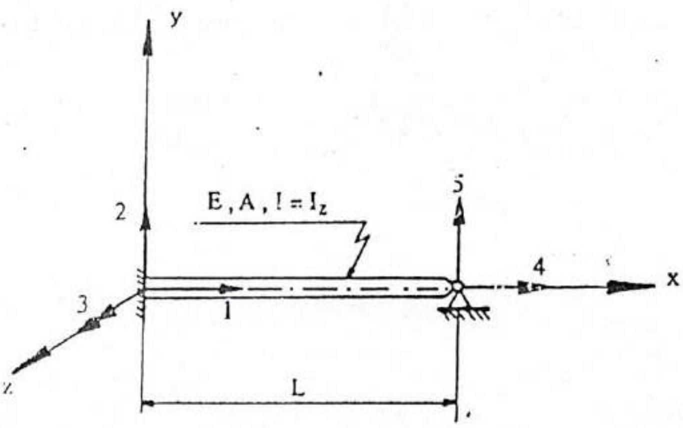
$$
[k] = \begin{array}{cccccc}
k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \\
\end{array}
$$

$$
[k] = \left[\begin{array}{cccccc}
\frac{EA}{L}C^2 + \frac{12\,EI}{L^3}S^2 & \frac{EA}{L}CS - \frac{12\,EI}{L^3}CS & -\frac{6\,EI}{L^2}S & -\frac{EA}{L}C^2 - \frac{12\,EI}{L^3}S^2 & -\frac{EA}{L}CS + \frac{12\,EI}{L^3}CS & -\frac{6\,EI}{L^2} \\
\frac{EA}{L}CS - \frac{12\,EI}{L^3}CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12\,EI}{L^3}C^2 & \frac{6\,EI}{L^2}C & -\frac{EA}{L}CS + \frac{12\,EI}{L^3}CS & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{12\,EI}{L^3}C^2 & \frac{6\,EI}{L^2} \\
-\frac{6\,EI}{L^2}S & \frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{4\,EI}{L} & +\frac{6\,EI}{L^2}S & -\frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{2\,EI}{L} \\
-\frac{EA}{L}C^2 - \frac{12\,EI}{L^3}S^2 & -\frac{EA}{L}CS + \frac{12\,EI}{L^3}CS & \frac{6\,EI}{L^2}S & \frac{EA}{L}C^2 + \frac{12\,EI}{L^3}S^2 & \frac{EA}{L}CS - \frac{12\,EI}{L^3}CS & \frac{6\,EI}{L^2} \\
-\frac{EA}{L}CS + \frac{12\,EI}{L^3}CS & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{12\,EI}{L^3}C^2 & -\frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{EA}{L}CS - \frac{12\,EI}{L^3}CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{12\,EI}{L^3}C^2 & -\frac{6\,EI}{L^2} \\
-\frac{6\,EI}{L^2}S & \frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{2\,EI}{L} & \frac{6\,EI}{L^2}S & -\frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{4\,EI}{L}
\end{array}\right]
$$

GUY UMONNI

TABLE 3 - BARRE ENCASTREE-APPUYEE D'UNE STRUCTURE PLANE CHARGEE DANS SON PLAN.

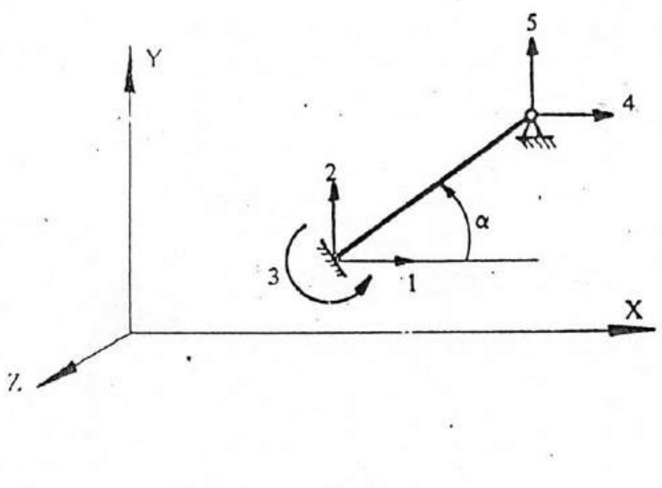
A) SYSTEME D'AXES LOCAL xy



$$|k| = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

B) SYSTEME D'AXES GLOBAL XY

$C = \cos\alpha$
$S = \sin\alpha$



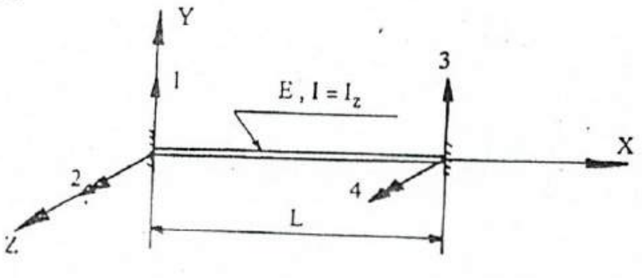
$$
|k| = \begin{array}{ccccc}
k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} \\
\end{array}
$$

$$
|k| = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L}C^2 + \frac{3EI}{L^3}S^2 & \frac{EA}{L}CS - \frac{3EI}{L^3}CS & -\frac{3EI}{L^2}S & -\frac{EA}{L}C^2 - \frac{3EI}{L^3}S^2 & -\frac{EA}{L}CS + \frac{3EI}{L^3}CS \\
\frac{EA}{L}CS - \frac{3EI}{L^3}CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{3EI}{L^3}C^2 & \frac{3EI}{L^2}C & -\frac{EA}{L}SC + \frac{3EI}{L^3}SC & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{3EI}{L^3}C^2 \\
-\frac{3EI}{L^2}S & \frac{3EI}{L^2}C & \frac{3EI}{L} & \frac{3EI}{L^2}S & -\frac{3EI}{L^2}C \\
-\frac{EA}{L}C^2 - \frac{3EI}{L^3}S^2 & -\frac{EA}{L}CS + \frac{3EI}{L^3}CS & \frac{3EI}{L^2}S & \frac{EA}{L}C^2 + \frac{3EI}{L^3}S^2 & \frac{EA}{L}CS - \frac{3EI}{L^3}CS \\
-\frac{EA}{L}CS + \frac{3EI}{L^3}CS & -\frac{EA}{L}S^2 - \frac{3EI}{L^3}C^2 & -\frac{3EI}{L^2}C & \frac{EA}{L}CS - \frac{3EI}{L^3}CS & \frac{EA}{L}S^2 + \frac{3EI}{L^3}C^2
\end{bmatrix}
$$

TABLE 4 - BARRE D'UNE POUTRE CONTINUE

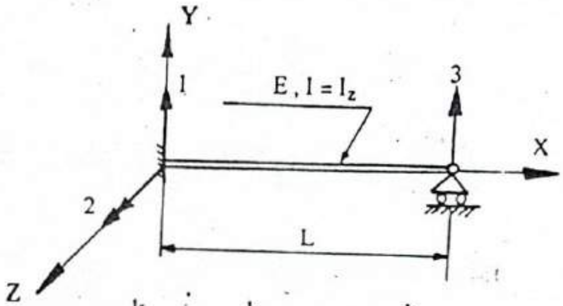
I.- CAS GENERAL.-

A) BARRE BI-ENCASTREE



$$
[k]=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2} & -\frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2}\\[4pt]
\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4\,EI}{L} & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{2\,EI}{L}\\[4pt]
-\frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2}\\[4pt]
\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{2\,EI}{L} & -\frac{6\,EI}{L^2} & \frac{4\,EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

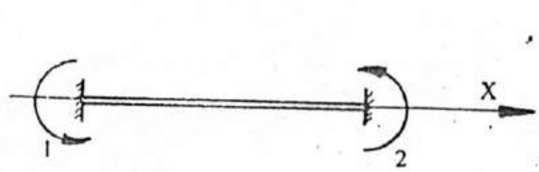
B) BARRE ENCASTREE-APPUYEE



$$
[k]=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\frac{3\,EI}{L^3} & \frac{3\,EI}{L^2} & -\frac{3\,EI}{L^3}\\[4pt]
\frac{3\,EI}{L^2} & \frac{3\,EI}{L} & -\frac{3\,EI}{L^2}\\[4pt]
-\frac{3\,EI}{L^3} & -\frac{3\,EI}{L^2} & \frac{3\,EI}{L^3}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

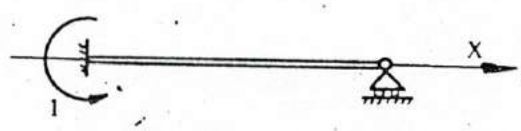
II.- CAS OU LES ROTATIONS SUR APPUI SEULES SONT PRISES COMME INCONNUES (RIGIDITE EI CONSTANTE PAR TRAVEES).-

A) BARRE BI-ENCASTREE



$$
[k]=\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} k_{i1} & k_{i2} \end{array}\\
\begin{bmatrix}
\frac{4\,EI}{L} & \frac{2\,EI}{L}\\[4pt]
\frac{2\,EI}{L} & \frac{4\,EI}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

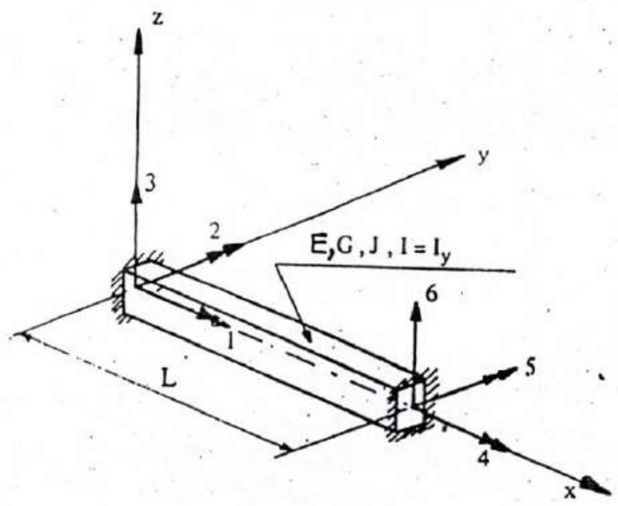
B) BARRE ENCASTREE-APPUYEE



$$[k] = k_{11} = \frac{3\,EI}{L}$$

TABLE 5 – BARRE BI-ENCASTREE D'UNE STRUCTURE PLANE CHARGEE PERPENDICULAIREMENT A SON PLAN

A) SYSTEME D'AXES LOCAL xyz

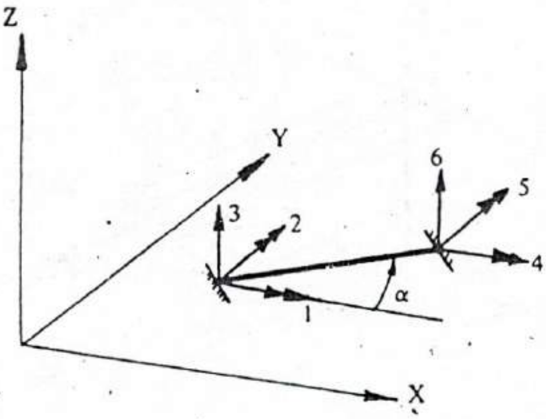


$$[k] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{array}\right] \end{array}$$

B) SYSTEME D'AXES GLOBAL XYZ

$C = \cos\ \alpha$

$S = \sin\ \alpha$



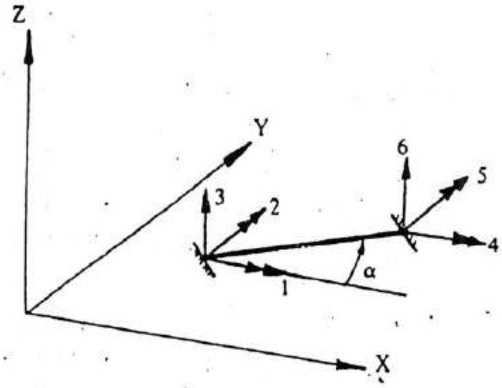
$$
[k] = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{GJ}{L}C^2+\frac{4EI}{L}S^2 & \frac{GJ}{L}CS-\frac{4EI}{L}CS & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{GJ}{L}C^2+\frac{2EI}{L}S^2 & -\frac{GJ}{L}CS-\frac{2EI}{L}CS & -\frac{6EI}{L^2}S \\
\frac{GJ}{L}CS-\frac{4EI}{L}CS & \frac{GJ}{L}S^2+\frac{4EI}{L}C^2 & -\frac{6EI}{L^2}C & -\frac{GJ}{L}CS-\frac{2EI}{L}CS & -\frac{GJ}{L}S^2+\frac{2EI}{L}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C \\
\frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2}S & -\frac{6EI}{L^2}C & -\frac{12EI}{L^3} \\
-\frac{GJ}{L}C^2+\frac{2EI}{L}S^2 & -\frac{GJ}{L}CS-\frac{2EI}{L}CS & \frac{6EI}{L^2}S & \frac{GJ}{L}C^2+\frac{4EI}{L}S^2 & \frac{GJ}{L}CS-\frac{4EI}{L}CS & -\frac{6EI}{L^2}S \\
-\frac{GJ}{L}CS-\frac{2EI}{L}CS & -\frac{GJ}{L}S^2+\frac{2EI}{L}C^2 & -\frac{6EI}{L^2}C & \frac{GJ}{L}CS-\frac{4EI}{L}CS & \frac{GJ}{L}S^2+\frac{4EI}{L}C^2 & \frac{6EI}{L^2}C \\
-\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2}S & \frac{6EI}{L^2}C & \frac{12EI}{L^3}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

A.8

B) SYSTEME D'AXES GLOBAL XYZ

$C = \cos\ \alpha$

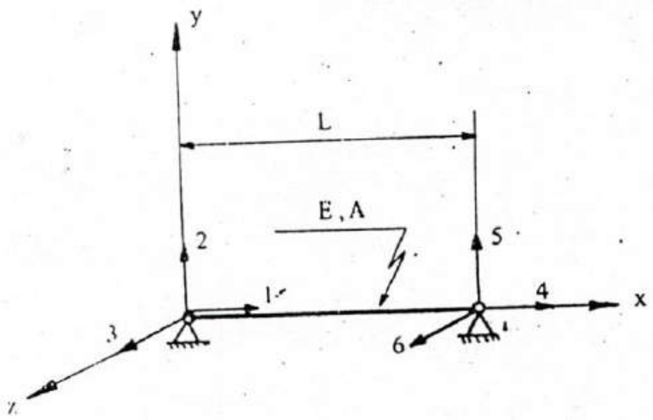
$S = \sin\ \alpha$



$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6}
\end{array}
\\
|k| = \begin{bmatrix}
\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{4\,EI}{L}S^2 & \frac{GJ}{L}CS - \frac{4\,EI}{L}CS & \frac{6\,EI}{L^2}S & -\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{2\,EI}{L}S^2 & -\frac{GJ}{L}CS - \frac{2\,EI}{L}CS & -\frac{6\,EI}{L^2}S \\
\frac{GJ}{L}CS - \frac{4\,EI}{L}CS & \frac{GJ}{L}S^2 + \frac{4\,EI}{L}C^2 & -\frac{6\,EI}{L^2}C & -\frac{GJ}{L}CS - \frac{2\,EI}{L}CS & -\frac{GJ}{L}S^2 + \frac{2\,EI}{L}C^2 & \frac{6\,EI}{L^2}C \\
\frac{6\,EI}{L^2}S & -\frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{12\,EI}{L^3} & \frac{6\,EI}{L^2}S & -\frac{6\,EI}{L^2}C & -\frac{12\,EI}{L^3} \\
-\frac{GJ}{L}C^2 + \frac{2\,EI}{L}S^2 & -\frac{GJ}{L}CS - \frac{2\,EI}{L}CS & \frac{6\,EI}{L^2}S & \frac{GJ}{L}C^2 + \frac{4\,EI}{L}S^2 & \frac{GJ}{L}CS - \frac{4\,EI}{L}CS & -\frac{6\,EI}{L^2}S \\
-\frac{GJ}{L}CS - \frac{2\,EI}{L}CS & -\frac{GJ}{L}S^2 + \frac{2\,EI}{L}C^2 & -\frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{GJ}{L}CS - \frac{4\,EI}{L}CS & \frac{GJ}{L}S^2 + \frac{4\,EI}{L}C^2 & \frac{6\,EI}{L^2}C \\
-\frac{6\,EI}{L^2}S & \frac{6\,EI}{L^2}C & -\frac{12\,EI}{L^3} & -\frac{6\,EI}{L^2}S & \frac{6\,EI}{L^2}C & \frac{12\,EI}{L^3}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

TABLE 6 – BARRE D'UNE TRIANGULATION DE L'ESPACE

A) SYSTEME D'AXES LOCAL xyz

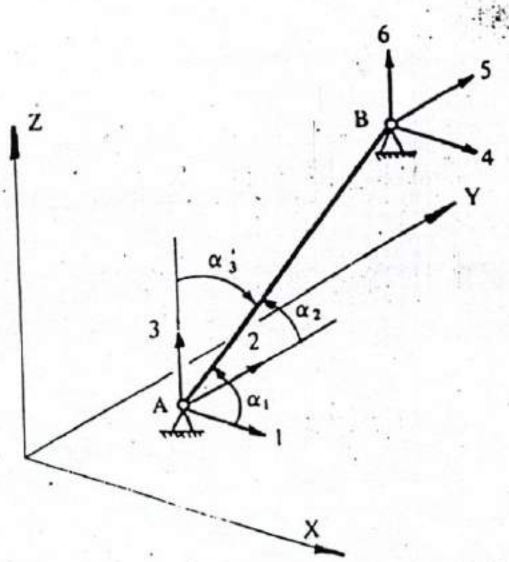


$$[k] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

B) SYSTEME D'AXES GLOBAL XYZ

$$\left.\begin{array}{l} l = \cos\alpha_1 \\ m = \cos\alpha_2 \\ n = \cos\alpha_3 \end{array}\right\} \text{cosinus directeurs}$$

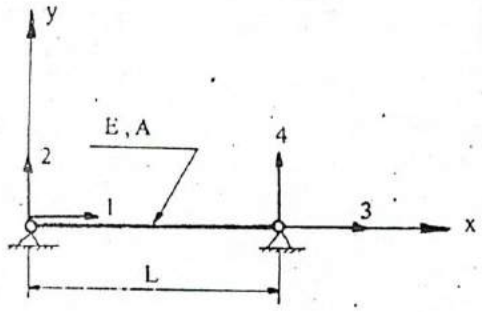
$$l = (X_B - X_A) / L$$
$$m = (Y_B - Y_A) / L$$
$$n = (Z_B - Z_A) / L$$



$$[k] = \frac{EA}{L} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} & k_{i5} & k_{i6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

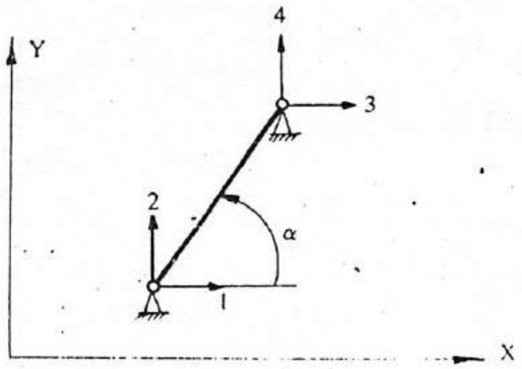
TABLE 7 – BARRE D'UNE TRIANGULATION PLANE

A) SYSTEME D'AXES LOCAL xy



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} \end{array} \\
[k] = & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

B) SYSTEME D'AXES GLOBAL XY



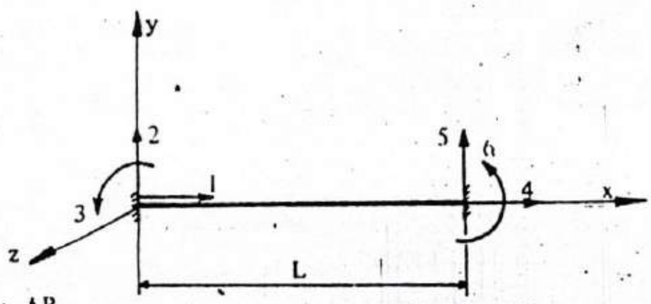
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} k_{i1} & k_{i2} & k_{i3} & k_{i4} \end{array} \\
[k] = \frac{EA}{L} \cdot & \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha \\ \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\,\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha \\ -\cos\alpha\,\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\,\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}
\end{array}
$$

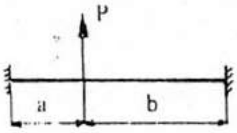
TABLE 8 – VALEUR DES COEFFICIENTS k_{ip} DES BARRES (MATRICES $[k_p]$)

CAS A

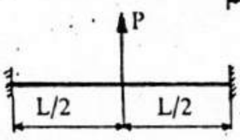
BARRE BI-ENCASTREE D'UNE
STRUCTURE PLANE CHARGEE
DANS SON PLAN

SYSTEME D'AXES LOCAL xyz

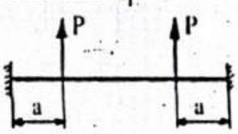




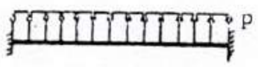
$$[k_p] = \begin{bmatrix} 0 \\ -Pb^2(L+2a)/L^3 \\ -Pab^2/L^2 \\ 0 \\ -Pa^2(L+2b)/L^3 \\ Pa^2b/L^2 \end{bmatrix}$$



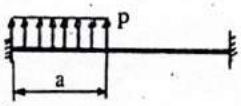
$$\begin{bmatrix} 0 \\ -P/2 \\ -PL/8 \\ 0 \\ -P/2 \\ PL/8 \end{bmatrix}$$



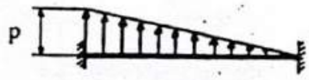
$$\begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ -Pa(L-a)/L \\ 0 \\ -P \\ Pa(L-a)/L \end{bmatrix}$$



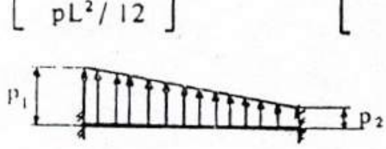
$$[k_p] = \begin{bmatrix} 0 \\ -pL/2 \\ -pL^2/12 \\ 0 \\ -pL/2 \\ pL^2/12 \end{bmatrix}$$



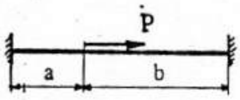
$$\begin{bmatrix} 0 \\ -pa(2L^3-2a^2L+a^3)/2L^3 \\ -pa^2(6L^2-8aL+3a^2)/12L^2 \\ 0 \\ -pa^3(2L-a)/2L^3 \\ pa^3(4L-3a)/12L^2 \end{bmatrix}$$



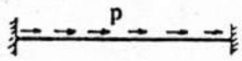
$$\begin{bmatrix} 0 \\ -7pL/20 \\ -pL^2/20 \\ 0 \\ -3pL/20 \\ pL^2/30 \end{bmatrix}$$



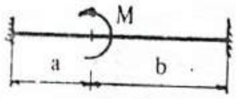
$$[k_p] = \begin{bmatrix} 0 \\ -(7p_1+3p_2)L/20 \\ -(3p_1+2p_2)L^2/60 \\ 0 \\ -(3p_1+7p_2)L/20 \\ (2p_1+3p_2)L^2/60 \end{bmatrix}$$

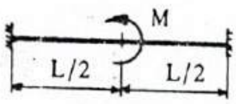


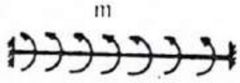
$$\begin{bmatrix} -Pb/L \\ 0 \\ 0 \\ -Pa/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



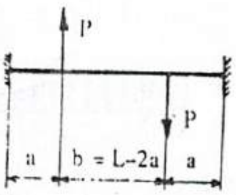
$$\begin{bmatrix} -pL/2 \\ 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

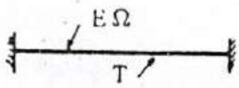




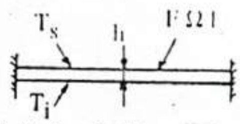


$$[k_p] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6Mab / L^3 \\ Mb(2a-b)/L^2 \\ 0 \\ -6Mab/L^3 \\ Ma(2b-a)/L^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3M/2L \\ M/4 \\ 0 \\ -3M/2L \\ M/4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -m \\ 0 \end{bmatrix}$$





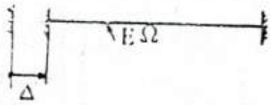
Variation de température uniforme de T degrés

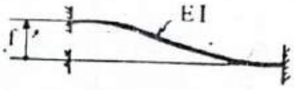


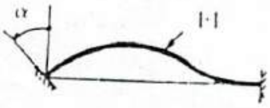
Variation linéaire de la température sur h, de T_s à T_i

$$[k_p] = \begin{bmatrix} 0 \\ -Pb(L^2+2aL-2a^2)/L^3 \\ -Pab(L-a)/L^2 \\ 0 \\ Pb(L^2+2aL-2a^2)/L^3 \\ -Pab(L-a)/L^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha TE\Omega \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha TE\Omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha(T_s+T_i)E\Omega/2 \\ 0 \\ -\alpha(T_s-T_i)EI/h \\ -\alpha(T_s+T_i)E\Omega/2 \\ 0 \\ \alpha(T_s-T_i)EI/h. \end{bmatrix}$$

<u>Tassements d'appui</u> ($\Delta \parallel x$, $f \parallel y$ et $\alpha \parallel z$)





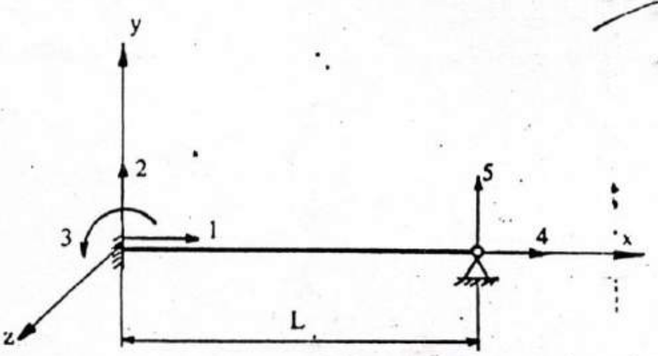


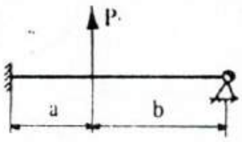
$$[k_p] = \begin{bmatrix} \Delta E\Omega/L \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta E\Omega/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 12fEI/L^3 \\ 6fEI/L^2 \\ 0 \\ -12fEI/L^3 \\ 6fEI/L^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 6\alpha EI/L^2 \\ 4\alpha EI/L \\ 0 \\ -6\alpha EI/L^2 \\ 2\alpha EI/L \end{bmatrix}$$

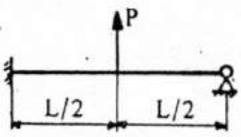
Ces vecteurs sont les colonnes successives de la matrice de la table 2A, multipliées par l'intensité du mouvement de l'appui.

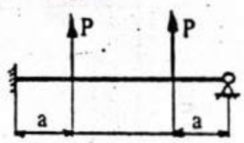
CAS B

BARRE ENCASTREE-APPUYEE
D'UNE STRUCTURE PLANE
CHARGEE DANS SON PLAN
SYSTEME D'AXES LOCAL xyz

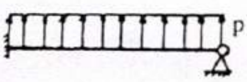


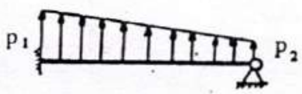


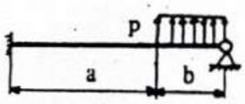




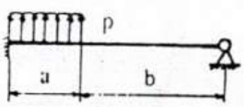
$$|k_p| = \begin{bmatrix} 0 \\ -Pb(3L^2 - b^2)/2L^3 \\ -Pab(L+b)/2L^2 \\ 0 \\ -Pa^2(3L-a)/2L^3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -11P/16 \\ -3PL/16 \\ 0 \\ -5P/16 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -P(2L^2 + 3aL - 3a^2)/2L^2 \\ -Pa(L-a)/2L^2 \\ 0 \\ -P(2L^2 - 3aL + 3a^2)/2L^2 \end{bmatrix}$$

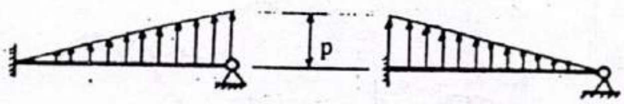




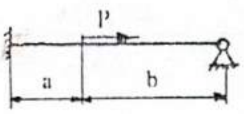


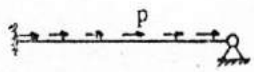
$$|k_p| = \begin{bmatrix} 0 \\ -5pL/8 \\ -pL^2/8 \\ 0 \\ -3pL/8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -(16p_1 + 9p_2)L/40 \\ -(8p_1 + 7p_2)L^2/120 \\ 0 \\ -(4p_1 + 11p_2)L/40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -pb^2(6L^2 - b^2)/8L^3 \\ -pb^2(2L^2 - b^2)/8L^2 \\ 0 \\ -pb(8L^3 - 6bL^2 + b^3)/8L^3 \end{bmatrix}$$

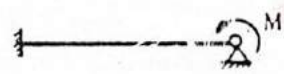




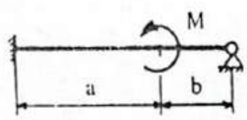
$$|k_p| = \begin{bmatrix} 0 \\ -pa(L+b)(5L^2 - b^2)/8L^3 \\ -pa^2(L+b)^2/8L^2 \\ 0 \\ -pa^3(3L+b)/8L^3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -9pL/40 \\ -7pL^2/120 \\ 0 \\ -11pL/40 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -2pL/5 \\ -pL^2/15 \\ 0 \\ -pL/10 \end{bmatrix}$$

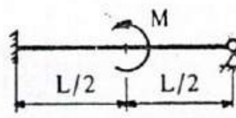


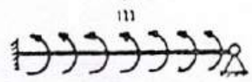




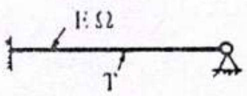
$$[k_p] = \begin{bmatrix} -Pb/L \\ 0 \\ 0 \\ -Pa/L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -pL/2 \\ 0 \\ 0 \\ -pL/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3M/2L \\ M/2 \\ 0 \\ -3M/2L \end{bmatrix}$$



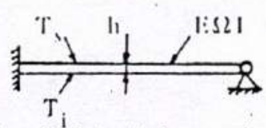




$$[k_p] = \begin{bmatrix} 0 \\ 3Ma(L+b)/2L^3 \\ M(L^2-3b^2)/2L^2 \\ 0 \\ -3Ma(L+b)/2L^3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 9M/8L \\ M/8 \\ 0 \\ -9M/8L \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -m \end{bmatrix}$$



Variation uniforme de température de T degrés



Variation linéaire de la température, sur h, de T_s à T_i

$$[k_p] = \begin{bmatrix} \alpha T E\Omega \\ 0 \\ 0 \\ -\alpha T E\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha(T_s+T_i)E\Omega/2 \\ -3\alpha(T_s-T_i)EI/2hL \\ -3\alpha(T_s-T_i)EI/2h \\ -\alpha(T_s+T_i)E\Omega/2 \\ 3\alpha(T_s-T_i)EI/2hL \end{bmatrix}$$

Tassements d'appui : prendre les colonnes de la matrice de la table 3A, multipliées par l'intensité du déplacement (Δ , f ou α).