

3.2.1.2. Exemples de calcul du déplacement d'un noeud.

A. Soit à calculer le déplacement vertical du noeud A (Fig 3.1. a). Les efforts N_i indiqués dans la colonne 5 du tableau ci-dessus s'obtiennent par la statique pour la sollicitation fixée à la figure 3.1. b i.e toutes les charges extérieures étant enlevées et une charge unitaire verticale appliquée au noeud A. Dans la colonne 6 sont indiqués les produits $\frac{N_i N_i' l_i}{A_i}$, calculés à l'aide des données des colonnes de 2 à 5. En faisant la somme de ces produits et en divisant par le module d'élasticité E , on trouve le déplacement vertical du noeud A. Dans ce cas on trouve :

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i N_i' l_i}{A_i} = 1292,5 \text{ kN/mm};$$

$$d_A = \frac{1292500}{190000} = 6,8 \text{ mm}$$

ou $E = 190000 \text{ N/mm}^2$ au lieu de 210000 N/mm^2 (voir mg § 3.2.1.3).

B. Soit à calculer le déplacement horizontal du noeud A. Nous appliquons en ce point une force horizontale unitaire (voir Fig 3.1. c). Les valeurs de N_i sont données dans la colonne 7 du tableau 3.1. En introduisant ces forces dans l'équation 3.4. On trouve le déplacement horizontal de A, qui est la somme des allongements des barres 2 et 4.



$$\sum_{i=1}^{11} \frac{N_i N'_i l_i}{A_i} = 1292,5 \text{ kN/mm}$$

$$d_A = \frac{1292500}{190.000} = 6,8 \text{ mm}$$

où $E = 190.000 \text{ N/mm}^2$ au lieu de 210.000 N/mm^2

~~Notamment~~ d'après la th. de la force unitaire (2.30), le déplacement d'un noeud quelconque j dans la direction Δ_j est donné par la formule

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^n \frac{N_i N'_i l_i}{EA_i} \quad (3.1)$$

où $n =$ nbre total des barres du treillis
 $N_i =$ sont des efforts réels dans le treillis sous l'effet des charges données

N'_i sont les efforts dans le même treillis sous l'effet d'une force unitaire appliquée au noeud j dans la direction Δ_j

Le calcul de l'expression (3.1) s'effectue sous forme de tableau.

Le calcul de la force N_i produite dans la barre i du treillis par les charges extérieures P_1, P_2, P_3 (doit) peut se faire par la statique (Méthode de Culmann, de Ritter ou de Cremona). Ces forces sont données dans la colonne 4 du tableau ci-dessus.

$$d_h = \frac{1}{E} \left(\frac{N_2 L_2}{A_2} + \frac{N_4 L_4}{A_4} \right) = \frac{2 \times 82500 \times 3750}{1700 \times 190000}$$

$$= 2,17 \text{ mm}$$

c. calcul du déplacement d'un noeud:
cas général

Même procédure, sauf que la charge unitaire sera dirigée suivant la direction du déplacement désiré.

Remarques
3.2.1.3.

1. Dans les calculs des déformations les normes Belges N.B.N. 4 et N.B.N. 5 demandent d'adopter pour les treillis en acier rivés ou boulonnés (boulons ordinaires) une valeur de $E = 190000 \text{ N/mm}^2$ pour tenir compte des légers glissements qui se produisent dans ces types d'assemblages. Pour les treillis soudés ou assemblés par boulons à haute résistance où il n'y a pas de glissement, on prendra la valeur exacte de $E = 210000 \text{ N/mm}^2$.

2. Si l'on désire déterminer le déplacement d'un point d'un treillis dans une direction donnée, en tenant compte à la fois de l'effet des forces appliquées, et d'une variation de température et d'un mouvement d'appui, on procède comme suit:

a. On étudie à part, les déplacements dus aux forces appliquées par le théorème de la force unitaire, avec prise en compte du tassement par la formule d.3.

$$1. d = \sum \frac{N N'}{EA} l + \sum R' r$$

a. r représente les déplacements projetés des appuis provoqués par les forces appliquées.

b. On étudie ensuite les déplacements dus aux variations de température dont l'expression générale est donnée par la formule (2.33)

$$1. d_T = \sum N' \alpha T l + \sum R' r$$

c. r représente les déplacements supplémentaires des appuis provoqués par une variation de t .

en additionnant membre au membre les 2 formules ci dessus, on trouve:

$$1. d_z = \sum \left(\frac{Nl}{EA} + \alpha T l \right) N' + \sum R' (r + \zeta) \quad (32)$$

$$1. d_T = \sum N' \alpha T l + \sum R' r_T.$$

où r_T représente les déplacements projetés supplémentaires des appuis provoqués par les variations de température.

c. En additionnant membre à membre des 2 formules ci-dessus, on a :

$$1. d_t = \sum \left(\frac{Nl}{EA} + \alpha T l \right) N' + \sum R' (r + r_T) \quad (3.2)$$

Fin chapitre.

Chap. 4. THEORIE GENERALE DES LIGNES D'INFLUENCE

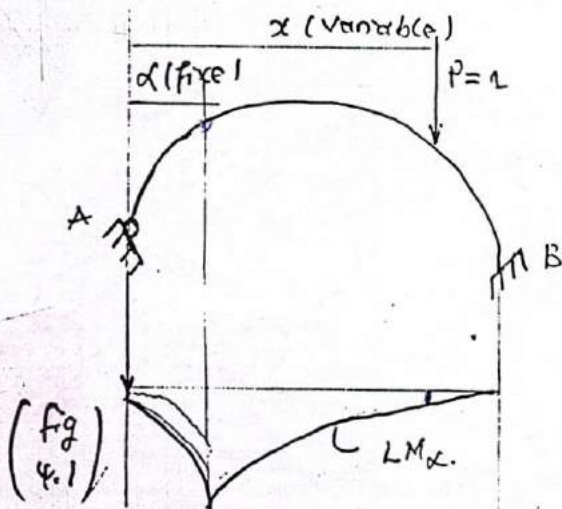
4.1. Notions fondamentales.

4.1.1. Nécessité d'une méthode spéciale

Dans le cas des charges mobiles, pour une section droite déterminée et un effet i.e. une sollicitation ou une déformation déterminée, par ex le moment fléchissant ou la flèche de une section ~~de~~ d'une poutre, la position de la charge (qui provoque le maximum) la théorie des lignes d'influence permet de déterminer la position des charges qui provoquent le maximum ou le minimum de l'effet considéré ~~dans la~~ ~~destruction~~ et le chiffre.

Dans ce chapitre, on se limite aux structures à plan moyen et système des charges verticales.

4.1.2. Notion de la ligne d'influence.



Considérons fig. 4.1. une poutre quelq. parcourue par une force unitaire $P=1$ (unité imperte peu) et considérons un effet déterminé par ex le moment fléchissant produit par cette force unitaire dans la section d'abaisse x .

On appelle ligne d'influence de cet effet dans la section considérée (x) la courbe telle que son ordonnée

Une sous une position donnée de la charge, donne à une certaine échelle la valeur du moment de l'effet considéré. La ligne d'influence est donc une représentation graphique de la loi Li effet $\alpha = f(x)$.

4.1.3. Utilisation des lignes d'influence. Recherche des effets maxima positifs et négatifs.

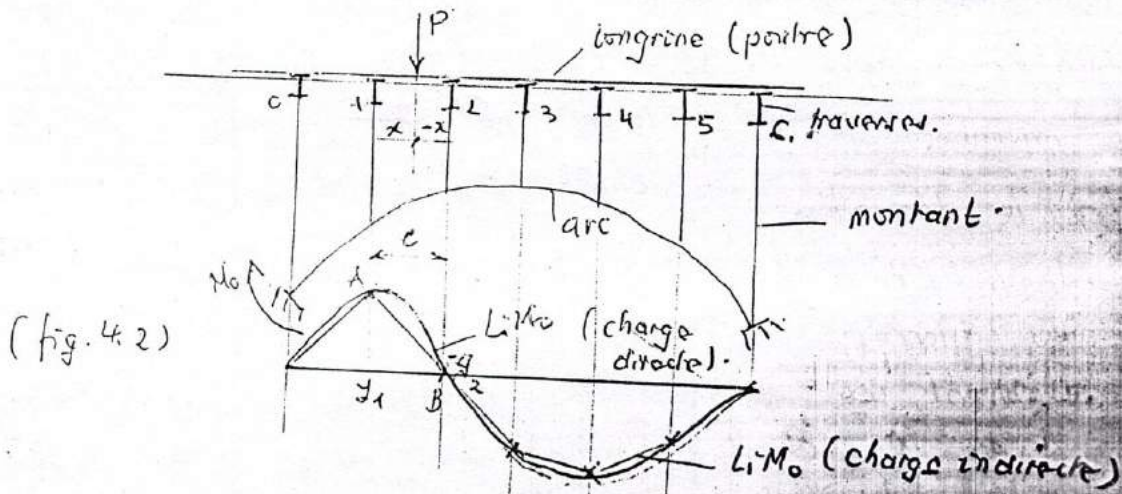
L'utilisation des L.I est basé sur la pp de superposition des effets. L'effet produit par n forces concentrées P_1, P_2, \dots, P_n placées en des endroits telles que les ordonnées correspondantes de la L.I sont Y_1, Y_2, \dots, Y_n vaut:

$$Y = \sum_{i=1}^n P_i \cdot Y_i$$

Si on a affaire à des charges réparties suivant la loi $p=p(x)$ dans un interval $[a, b]$, l'effet produit vaut:

$$Y = \int_a^b p(x) y(x) dx$$

4.1.4. Cas des charges transmises indirectement



Preons par ex le cas d'un arc bi-accroché' fig. 4.2 et supposons que les charges soient transmises à l'arc par l'intermédiaire d'1 tablier et des montants réguliers espacés. Les longrines de tablier sont supportées simple appuyées à leurs deux extrémités sur les traverses au-dessus des montants. Soit $L \cdot I$ la $L \cdot I$ de moment d'encastrement déterminée d'1 hypothèse où les charges agissent directement sur l'arc.

Une charge P sur la section longrine par ex fig 4.2 se compose de 2 charges partielles P_1 et P_2 agissant au droit des montants 1 et 2 respectivement. On a:

$$P_1 y_1 + P_2 y_2$$

Si y_1 et y_2 sont les ordonnées de la ligne d'inf. au droit des montants 1 et 2, l'effet produit par la charge P , vaut:

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 = \frac{P((c-x)y_1 + xy_2)}{c} = \eta$$

On obtiendrait le même effet, en supposant que la charge P se déplace sur une nouvelle $L \cdot I$ d'ordonnée $\eta = \frac{(c-x)y_1 + xy_2}{c}$. Cette équation représente la dite poutre A et B. En effet, pour $x=0$ et $x=c$, on a respectivement $\eta = y_1$ et $\eta = y_2$.

Ce raisonnement est valable pour n'importe quelle longrine, d'où le théorème:

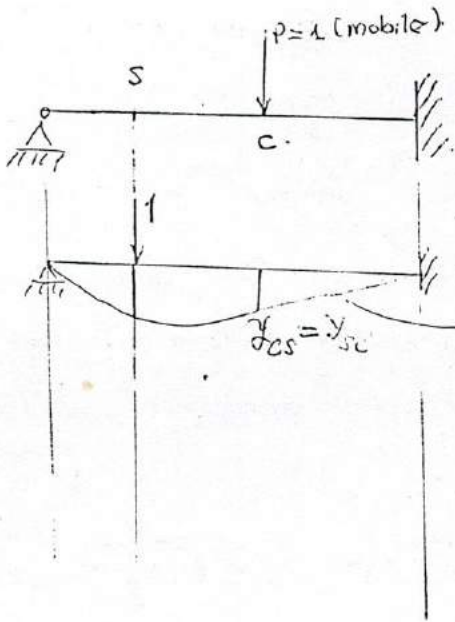
" Si les charges sont transmises au système par l'intermédiaire des traverses, les $L \cdot I$ d'un effet global d'une section donnée s'obtiennent via suit:

1. On cherche la $L \cdot I$ de l'effet en supposant que les charges agissent directement;

2. On trace les verticales au droit des travées et on détermine leur pt d'intersection avec la dite L.I;
3. On inscrit dans l'adite L.I le polygone pesant par ces pts, qui représente la vraie L.I cherchée.

4.2. Lignes d'influence des effets géométriques.

(Déplacements en rotation élastiques de ces syst. iso et hyperstatiques).



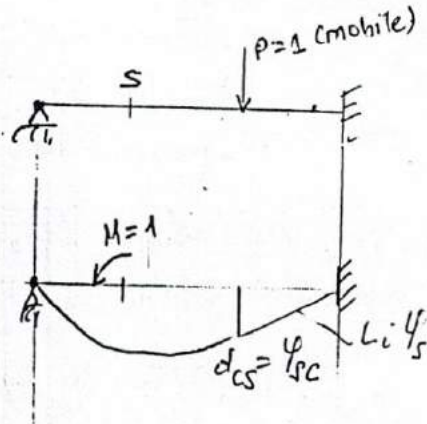
Supposons que l'on désire obtenir la L.I. du déplacement verticale d'une section S d'une poutre quelq voir fig. 4.3. Appliquons la charge unitaire à la section S et traçons la ligne élastique de la poutre (déformée de la poutre). Dans cette ligne une ordonnée tra sous un pt C représente par construction le déplacement y_{cs} du pt C provoqué par la charge unitaire placée à S .

Mais par le théorème de Maxwell, cette ordonnée représente aussi le déplacement direct y_{sc} du pt S provoqué par la charge unitaire placée à C . Par conséquent la ligne élastique est aussi la L.I. que l'on recherche. Ainsi donc:

" La L.I. d'une section S de la structure, projetée sur une direction déterminée Δ et donnée par l'élastique de la structure déformée par une force unitaire de direction Δ , appliquée dans la section S "

D'une manière analogue, pour obtenir la L.I. de la rotation φ_S d'une section S , il suffit d'appliquer un couple $M=1$ en

et de construire les diagrammes de déplacements verticaux. Ces diagrammes représentent aussi les L.I. de φ_s cherchés.



(d'après le th. de Maxwell,

$$d_{cs} \cdot P_c = \varphi_{sc} M_s.$$

$$\text{avec } P_c = M_s = 1$$

$$d_{cs} = \varphi_{sc}$$

Ainsi donc : " La L.I. de la rotation

d'une section S de la structure est donnée par l'ens. de déplacements verticaux (i.e. à l'origine ou déformée) de la structure déformée par un couple de moment unitaire appliqué à la section S."

4.3. Procédé général pour rechercher la ligne d'influence d'une rx d'appui ou d'un alt. de réduction M, N, T dans un système isostatique.

4.3.1 Notion de coupure simple.

Dans la section droite d'une poutre, il \exists 3 efforts intérieurs M, N et T dans le cas plan; Ces efforts sont des forces de liaison entre les deux faces de la section.

On peut donc associer à chacun d'eux une certaine liaison cinématique. Ainsi dans toute section d'une poutre, il \exists 3 liaisons cinématiques auxquelles correspondent les 3 efforts intérieurs et qui assurent la transmission de ces derniers à travers la section.

On appelle coupure simple dans une section ou en un appui, la suppression d'une liaison cinématique.

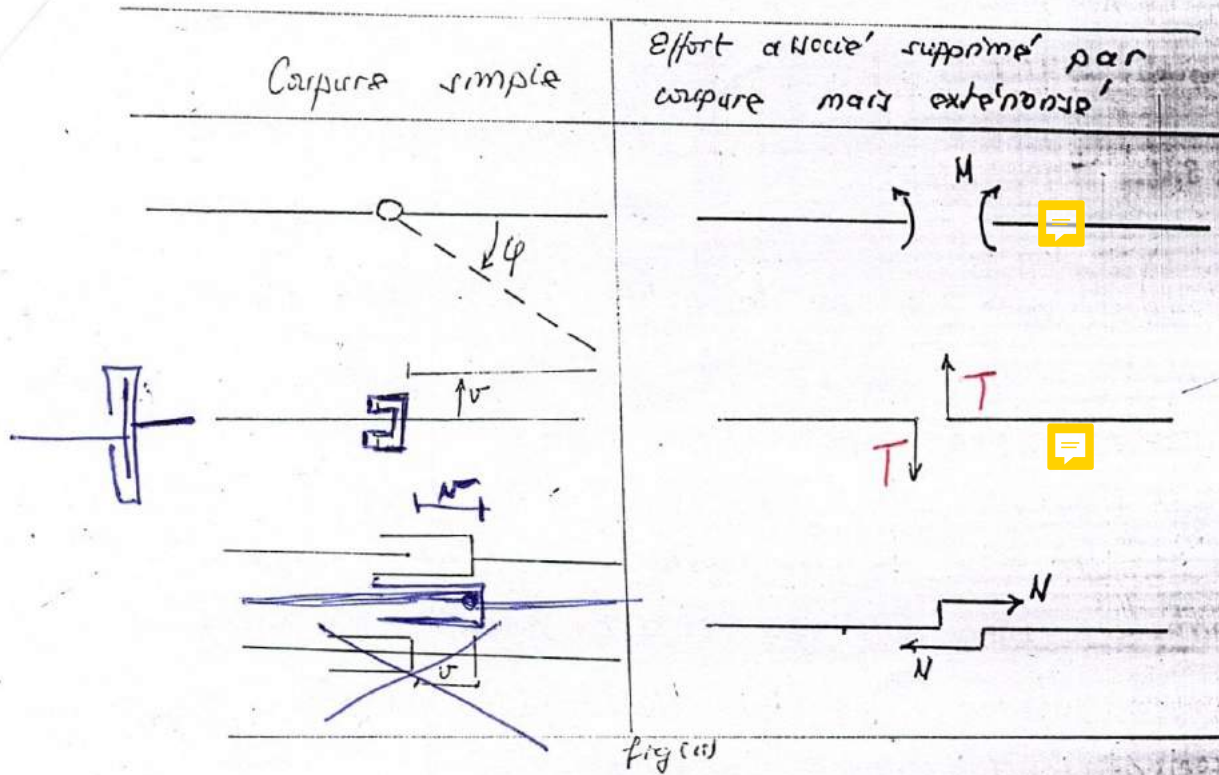


fig. (a)

Voir la fig. a.

- la suppression de M s'obtient par l'introduction d'une articulation
- celle de T par un dispositif à plateaux glissant l'un sur l'autre (grs en contact)
- celle de N par un système à piston.

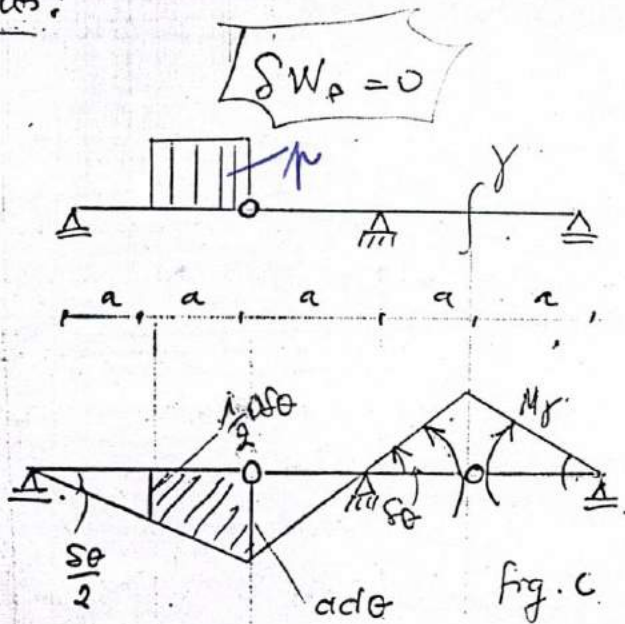
Appui	Coupure	Rx supprimées mais étendue

fig. b

La figure b. montre les coupures simples (appliquées) pratiquées sur les appuis usuels.

✓ 4.3.2. Une application de la notion de coupure simple.

L'introduction d'une coupure simple dans une structure rigide hque transforme celle-ci en un mécanisme à 1 degré de liberté. A l'aide du th. des déplacements virtuels, on peut l'employer pour trouver les efforts intérieurs M, N, T : il suffit de pratiquer la coupure simple relative à un effort déterminé dans une section fixe, d'introduire dans la coupure la paire d'efforts libérés (ceci s'appelle l'extensification de l'effort intérieur), de donner un déplacement virtuel d'ensemble cinématique admissible et d'écrire l'équation des travaux virtuels des corps indéformables:



$$\delta W_e = 2M_y \delta \theta + p \frac{a}{2} (a \delta \theta + \frac{1}{2} a \delta \theta) = 0$$

$$\Rightarrow M_y = - \frac{3pa^2}{8}$$

On note que le moment agit dans le sens inverse de celui supposé. Cette manière d'appréhender le calcul des efforts intérieurs n'est pas général pas la plus intéressante et ne sera abordée qu'exceptionnellement. Mais l'idée w- de base est à la base de la théorie

des lignes d'influence des systèmes roostatiques.

4.3.3. Recherche des lignes d'influence

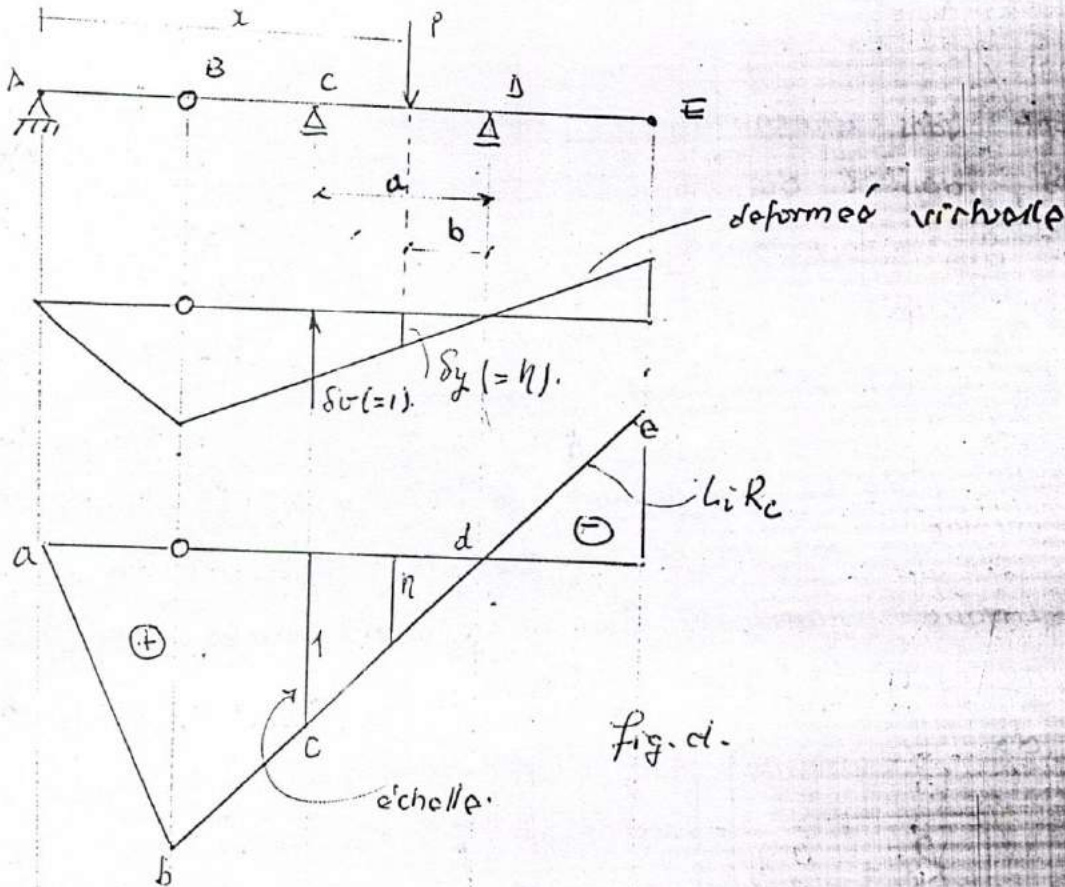


Fig. d.

Considérons une poutre quelconque Fig. d parcourue par une force P d'abscisse x variable et proposons-nous d'étudier la ligne d'influence de la réaction virtuelle R_C au point C par exemple.

Pratiquons la coupure simple relative à R_C et étendons R_C . Imaginons un déplacement virtuel δv au point C dans le sens contraire de la force de coupure R_C qui remplace l'action de l'appui, nous obtenons la déformée virtuelle représentée. (Ce sont les droites pour les systèmes roostatiques).

On a :

$$\delta W_e = - R_C \delta v + P \cdot \delta y = 0$$

$$\text{d'où } R_c = \frac{P \delta y}{\delta v} = P \cdot \frac{M}{P} = PM$$

$$\frac{\delta y}{\delta v} = \frac{b}{a} \quad (4.0)$$

Le rapport sans dimension $\frac{R_c}{P}$ est donné par le rapport de 2 ordonnées, rapport qui est indépendant de la valeur de δv puisque δy lui est directement proportionnel.

Si l'on choisit $\delta v = 1$ pour définir les déformées, $\frac{R_c}{P}$ vaudra l'ordonnée M quelque soit la position de la charge mobile.

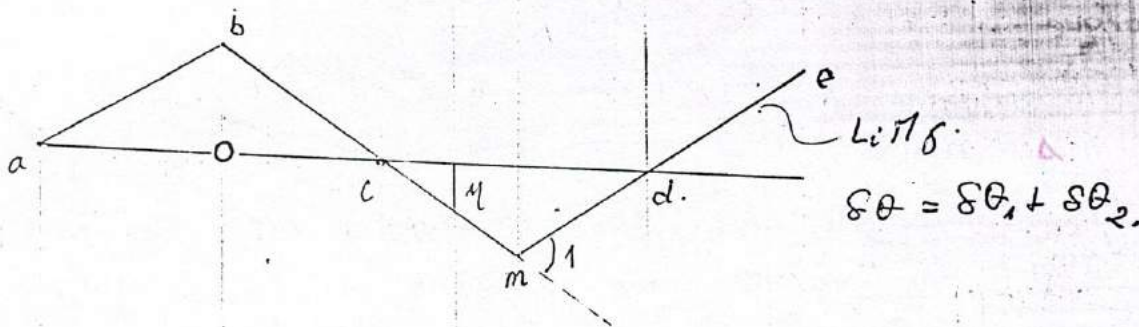
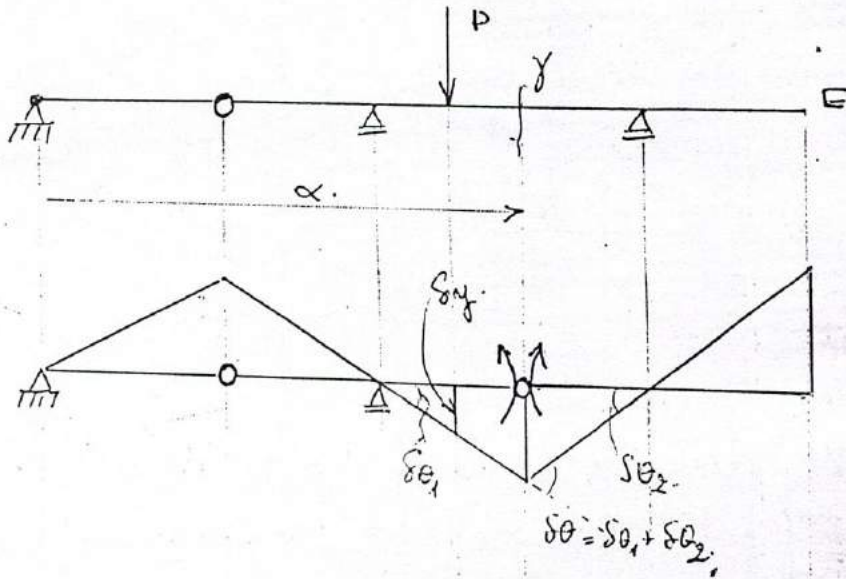
La ligne brisée a-b-c (en 2 segments parce que 2 corps après rupture) est la ligne d'influence de R_c .

→ Lorsque plusieurs charges se trouvent sur la poutre, chacune possède sa propre ordonnée M_i (en valeur et en signe), de sorte qu'on détermine la réaction :

$$R_c = P_1 M_1 + P_2 M_2 + \dots + P_n M_n$$

On appelle ligne d'influence d'un effet dans une section donnée une ligne telle que son ordonnée lue, sous une position de la charge donne la valeur de l'effet considéré.

Cherchez ci présent (Fig. e) la ligne d'influence de M de la section f d'abscisse x fixe.



$$\sum W_e = -M \delta\theta_1 - M \delta\theta_2 + P \delta y = 0$$

$$\Rightarrow -M \delta\theta + P \delta y = 0 \Rightarrow M = P \frac{\delta y}{\delta\theta} = \frac{M}{1} P$$

Le rapport $\frac{M}{P}$ est indépendant de la valeur de $\delta\theta$ puisque δy lui est directement proportionnel. Si l'on choisit $\delta\theta = 1$ pour définir la déformée, $M = P$ quelque soit la position de la charge mobile. La ligne brisée a-b-m-e (trois segments puisqu'il s'agit de 3 corps après la coupure) est la ligne d'influence $Li M_y$. Les unités des ordonnées de la ligne sont des longueurs.

Pour faciliter l'obtention des lignes d'influence, on retiendra que :

pour trouver, dans une structure isostatique, la ligne d'influence d'un effet mécanique, on effectue la coupure simple relative à cet effet, puis on donne à la

Structure ainsi transformée un déplacement virtuel cinématique admissible dans le sens contraire à celui dans lequel on mesure cet effet, tel que le déplacement de la usure vale l'unité.

La configuration déformée virtuelle de la structure représente la L.I. recherchée.

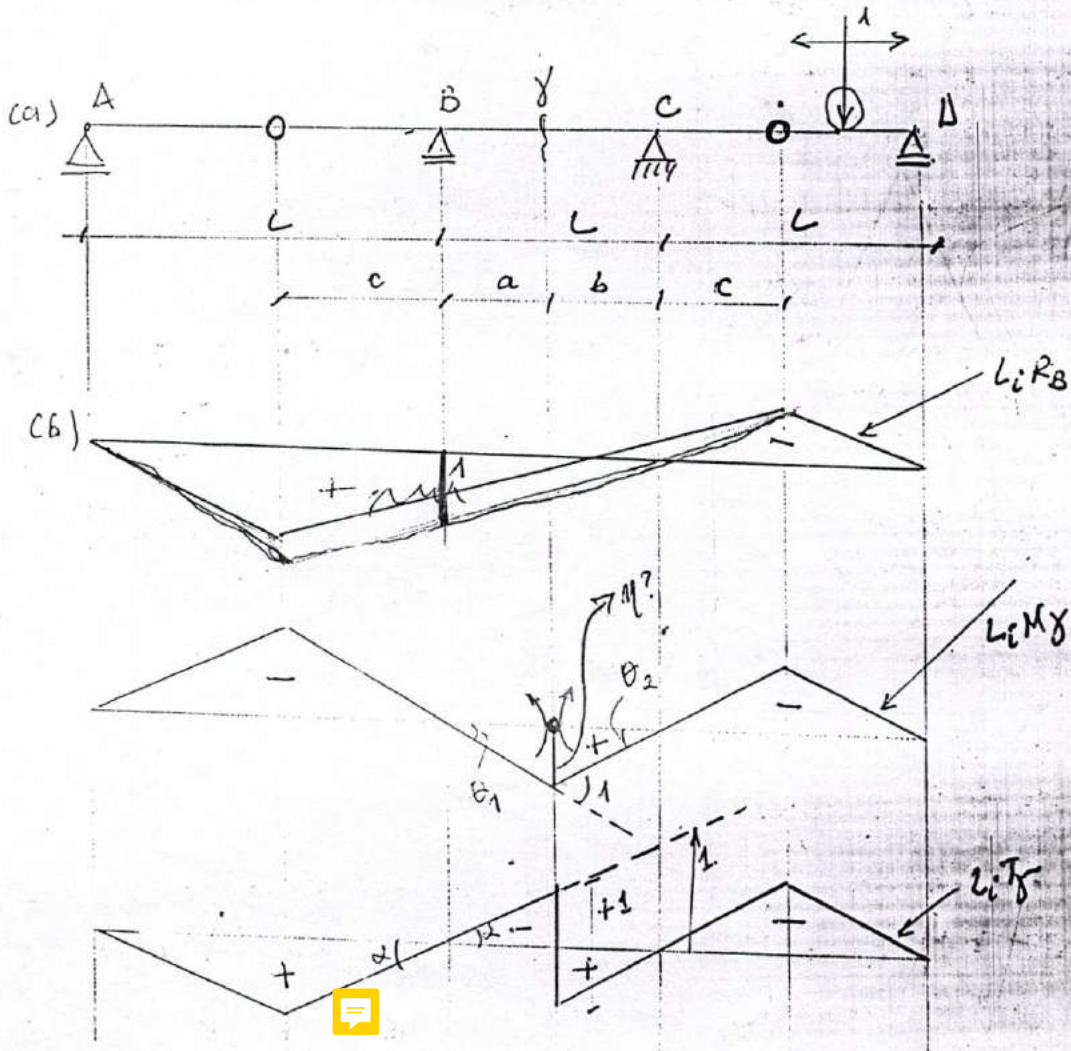
Cette règle générale issue du th. des déplacements virtuels des corps indéformables est une méthode cinématique par laquelle on trace direct et sans calcul (l'allure) de toute ligne d'influence.

Remarques:

- Si le déplacement relatif de la usure n'est pas pris égal à l'unité sa valeur sera l'échelle de la ligne d'influence.
- Il peut arriver que le tracé d'une ligne d'influence nécessite l'emploi de centres instantanés de rotation, ce qui suppose une bonne connaissance de cette théorie, voir le cours de cinématique, en particulier le th. de Kottedy.
- Dans ces cas jugés trop compliqués par la méthode cinématique, l'application pure et simple de la définition générale de la ligne d'influence permet de tracer celle-ci par calcul direct de quelques ordonnées au moyen des considérations statiques.

4.3.4. Exemples.

1. Tracer les L.I. de la réaction en B_2 et de M et T dans la section γ de la poutre cantilever (continue mais isostatique) de la fig.

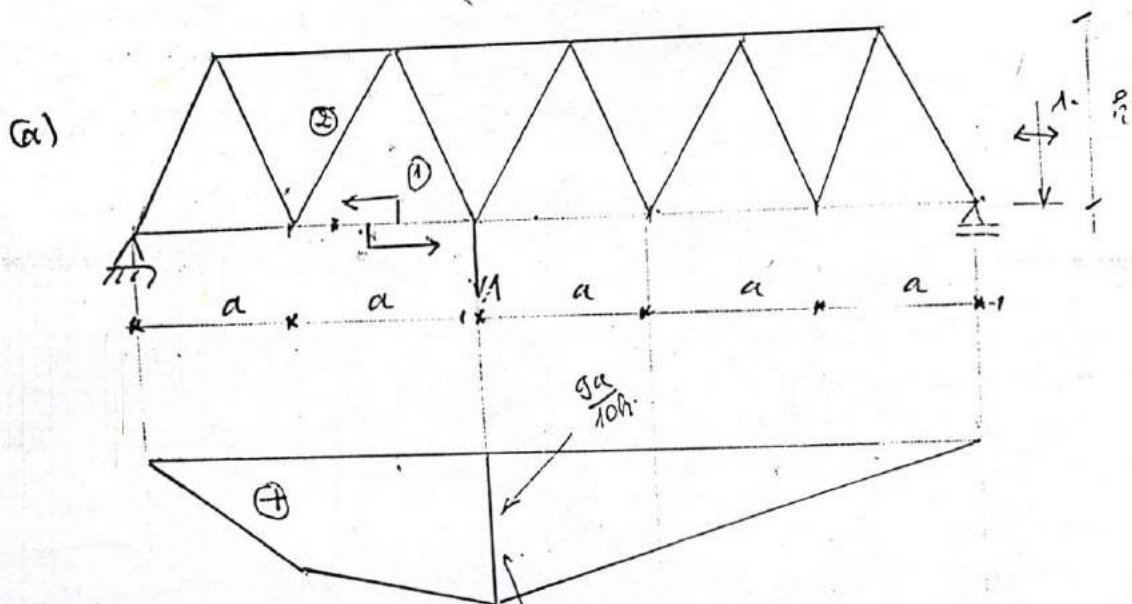


$$\theta_1 \rightarrow \eta = \theta_1 \cdot a, \quad \theta_2 = \frac{\theta_1 \cdot a}{b}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 1 \rightarrow \theta_1 + \frac{\theta_1 \cdot a}{b} = \theta_1 \left(\frac{b+a}{b} \right) = 1$$

$$\rightarrow \theta_1 = \frac{b}{b+a} \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{b \cdot a}{b+a} \rightarrow \eta = \frac{a \cdot b}{L}$$

2. Tracer les lins des efforts dans les barres 1 et 2 de la poutre triangulée fig (i), la charge unité' roule au niveau de la membrure inférieure.



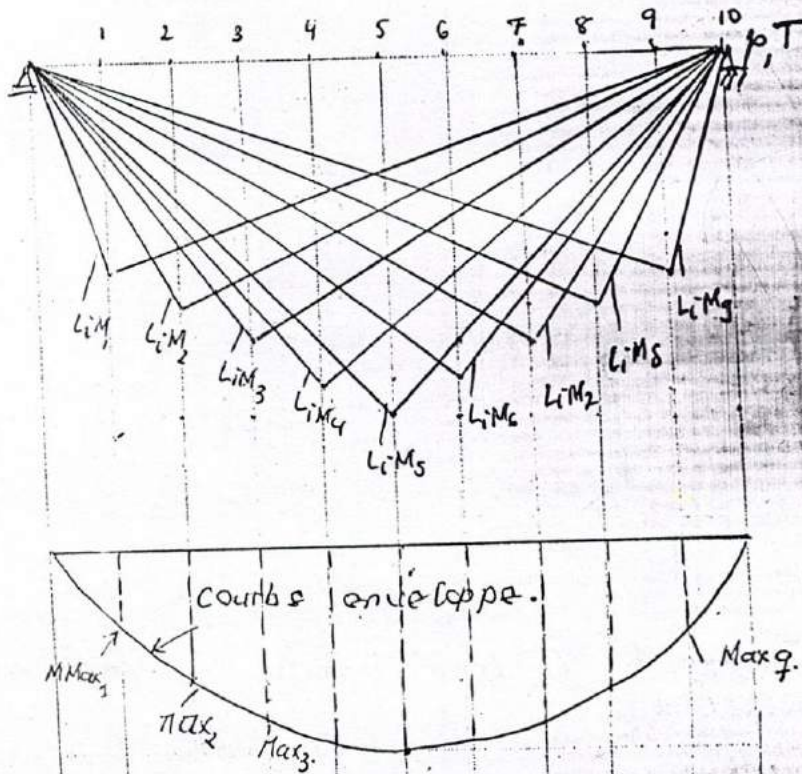
pour trouver cette ordonnée, on applique une charge verticale (1) voir fig, on calcule l'effort N dans la barre (I) (par Ritter). la valeur de N vaut l'ordonnée cherchée (Def. de la Li).

4.3.5 Courbes enveloppes.

Pour dimensionner les éléments d'une structure (section de poutre ou dispositif d'appuis) il est nécessaire de connaître les valeurs extrêmes des effets mécaniques (effets de réduction ou de réaction d'appuis) qui peuvent y réagir. Il faut donc établir un grand nombre des sections judicieusement espacées sur la longueur de la poutre et y déterminer les valeurs extrêmes algébriquement, des effets de réductions en chargeant les Li correspondantes de la façon la plus défavorable et en y ajoutant des effets des charges permanentes.

Une façon élégante de présenter le résultat de calcul est de tracer deux courbes dites courbes enveloppes dont les ordonnées donnent respectivement le maximum,

Ex:



1. On subdivise la portée en 10 parties égales;
2. On trace la L_i de l'effet dans chq section;
3. Pour chq L_i , on cherche la valeur de l'effet max.

✓ 4.4. Procédé général pour chercher la L_i d'une r.e. d'appui ou d'un élt M, N ou T dans un syst. hyperst. th. de Land.

Grâce au th. de Maxwell, nous allons démontrer que les procédés pour chercher la L_i Infl. d'un effet donné dans une section donnée dans un système élastique peut s'appliquer sans modification à un syst. hyperst.

Soit P_1 l'élt (R, M, N ou T) dont on désire trouver la L_i dans une section donnée. Supposons pour fixer les idées que P_1 soit la poussée d'un arc à deux rotules au point 1.

Voir la fig (4.4.a).

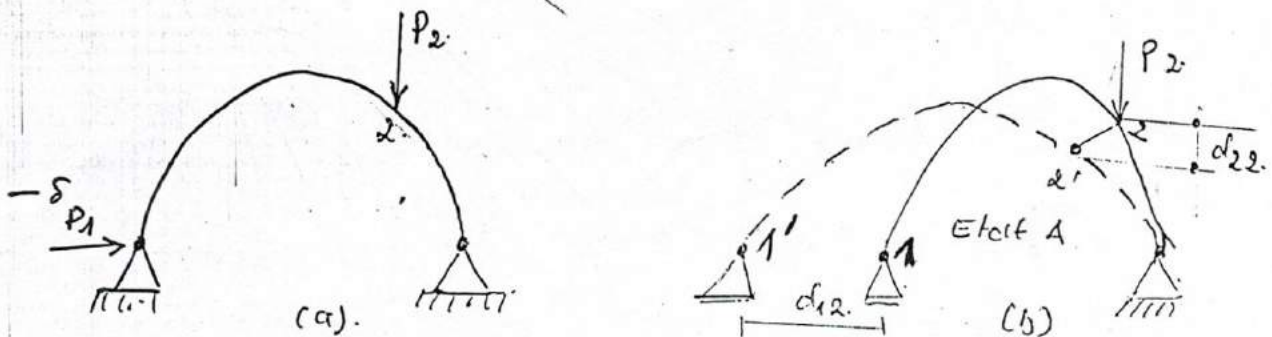


Fig. 4.4.

Désignons par P_2 , la force mobile qui fait naître P_1 , affectons la coupure simple relative à P_1 , dans l'exemple choisi, cela se fait en remplaçant la rotule de gauche par un chariot à tige dilatation. Le point 1 sera en 1' voir Fig 4.4.b soit d_{12} ce déplacement mesuré suivant P_1 . Pour ramener 1' en 1 il faudra introduire en 1 une force P_2 égale à celle que la coupure a annihilée i.e. lorsque si elle agit seule sur le système coupuré et non chargé, elle produirait un déplacement d_{11} égale et contraire à d_{12} (voir Fig 4.4.c).

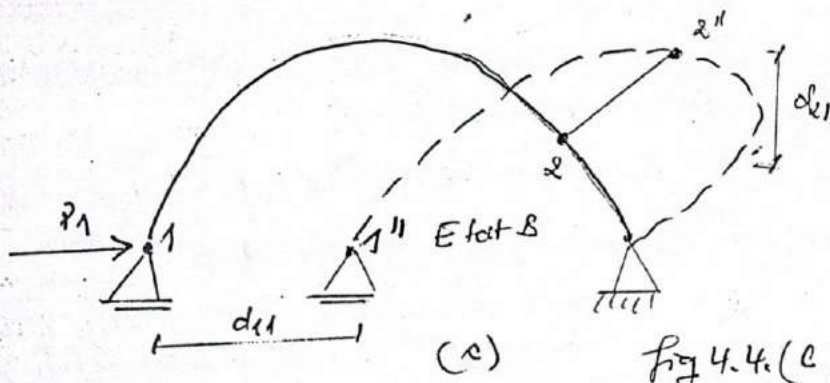


Fig 4.4.(c)

Cette valeur de P_1 créée par P_2 résulte de la condition $d_{12} + d_{11} = 0$ (a) et d'après le th. de Maxwell;

$$\frac{d_{12}}{P_2} = \frac{d_{21}}{P_1} \text{ ou } P_1 = \frac{d_{21}}{d_{12}} P_2 \text{ ce qui avec (a)}$$

$$\text{Soient : } P_1 = - \frac{d_{21}}{d_{11}} P_2$$

- Si $P_2 = 1$ c'est on doit être la supporter dans la recherche de d_{21} de P_1 , on trouve

$$P_1 = - \frac{d_{21}}{d_{11}} \quad (4.1).$$

Imqs

- L'expression (4.1) ne renferme que les déformations dues au déplacement M'' et est un rapport de deux de ces déformations, le rapport est donc indépendant de la grandeur de d_{11} , car d_{21} lui est proportionnelle, et peut se calculer au moyen d'une valeur arbitraire de cette quantité;
- Les déplacements d_{21} et d_{11} sont indépendants de la position de la force mobile P_2 . On peut donc tracer la L.I sans tenir compte de la position de P_2 ;
- Si nous voulons que le signe de P_1 soit celui de d_{21} , le signe de d_{11} doit être négatif d'où on donnera à P_1 un déplacement d_{11} négatif (< 0) c'est à dire dirigé dans le sens inverse de celui de P_1 . Par convention les déplacements verticaux positifs sont dirigés vers le bas.
- On prendra cette échelle de L.I d_{11} qui représente le déplacement relatif de deux lignes de la coupure.
- La formule (4.1) dérivée de th. de Maxwell, elle s'applique comme ce dernier et tous les systèmes élastiques reposant sur appuis fixe ou élastique, cependant elle n'est plus valable si c'est recherche est la rx d'un appui élastique.

En effet, pour ramener dans ce cas, le syst. coupuré
à son état initial, on ne peut pas ramener seulement le pt A'
à sa position initiale A puisque l'appui A est déformable.

Dans ce cas, la Li' d'une telle réaction est considérée comme
ligne d'influence (L.I.) secondaire à déterminer par la statique
(voir de la suite du cours).

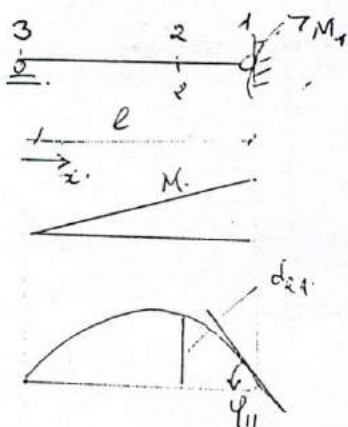
Nous pouvons résumer ce qui précède par le th
de Land suivant :

" Pour trouver la ligne d'influence d'un élément R, M, N ou
 T (R se rapportant à un appui fixe) dans un système
hyperstatique à appuis fixes ou élastiques, on effectue
la coupure simple relative à cet élément, et on fait
agir sur le syst. ainsi préparé un élément (une
force ou un moment; ou 2 forces et 2 moments) dans
le sens contraire de son sens positif. Les ordonnées
de la Li cherchée sont données avec signe à une
certaine échelle, par les déplacements verticaux du
système coupuré ainsi sollicité. L'échelle de la
 Li est donnée par le déplacement relatif de 2
traverses de la coupure."

Lang. La calcul des Li est la plupart du temps plus long
par la méthode de Land que par les procédés généraux
de résolution des systèmes hyperstatiques exposés
dans la suite du cours.

4.5. Exemples d'application

1. Soit à chercher la M_1 , dans une poutre droite prismatique encastrée en 1 et appuyée en 3. Fig (4.5) par le théorème de Land.

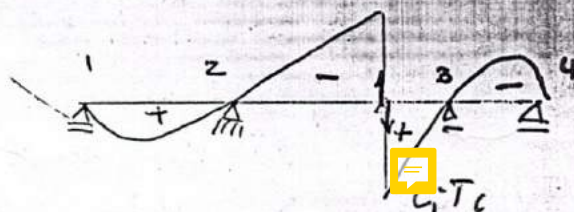
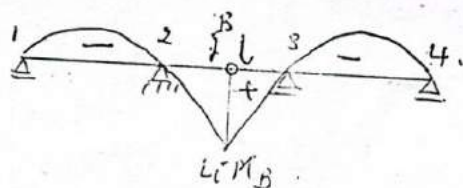
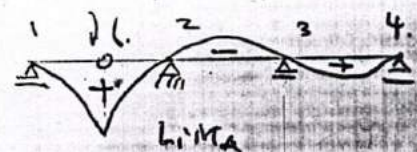
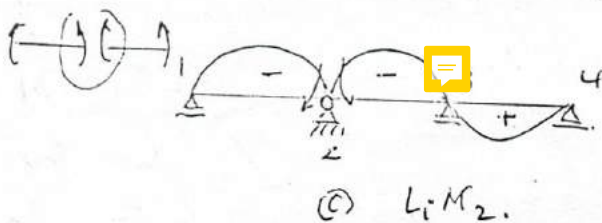
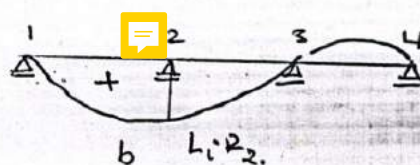
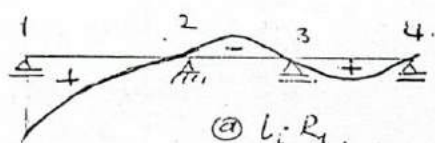


Réponse :

$$M = \frac{M_1}{l} x; \quad \varphi_{11} = \frac{M_1 l}{3EI}; \quad d_{21} = \frac{M_1 l^2}{6EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right)$$

$$\text{eq. } L_i \rightarrow m_1 = \frac{d_{21}}{\varphi_{11}} = \frac{x^2}{2} \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right)$$

2. Soit à chercher l'allure des lignes d'influence des R, M et T dans une poutre continue sur 4 appuis. En appliquant le théorème de Land, on trouve l'allure des lignes d'influence vus :



4.6. L_i primaire et secondaires

Il n'est pas nécessaire de rechercher toutes les L_i d'un syst' hyperst. par la méthode de Land. Il suffit de détermination par la même méthode un nbra des L_i primaires égal au degré d'hypersteribilité' du syst. On peut ensuite en déduire toutes les autres L_i dites secondaires par la technique. (voir la suite du cours).

fin -

14

CHAP V. LES DEUX METHODES D'ETUDE DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES : METHODE DES DEPLACEMENTS & M. DES FORCES

5.1. Généralités

Dans ce chap. est exposé le principe de chacune de ces méthodes. La méthode des forces sera développée aux chap. VI, VII & VIII et celle des déplacements aux chap IX, X et XI. Rappelons - nous le principe de superposition vu en élasticité et en RDM :

« Considérons une structure faite des matériaux élastiques et obéissant à la loi linéaire de Hooke, si les déformations de la structure sous l'effet des forces appliquées sont très petites et n'affectent pas l'action des forces (c'est la théorie du premier ordre).

L'effet produit par plusieurs forces agissant simultanément est égal à la somme des effets produits par chacune des forces supposée agissant individuellement \Rightarrow

On distingue deux catégories d'effets :

- les effets mécaniques ou statique (réaction R , les élt. de réduction H, N, T, M_x , les contraintes σ et τ) pour la quel le principe s'appelle "principe de superposition des forces" ;
- les effets géométriques ou cinématiques (déplacement linéaire d , rotation φ , de formation ε et γ) pour lesquels le principe s'appelle "principe de superposition de déplacements".

5.2. La méthode des déplacements

5.2.1. Définitions ; on appelle :

- Noeud : un point de la structure où l'on charge une ou plusieurs inconnues.
- Inconnues cinématiques : les inconnues de la méthode de déplacements ; ce sont les déplacements inconnus des noeuds de la structure étudiée.
- Structure cinématiquement déterminée : une str. dont les inconnues cinématiques sont toutes imposées nulles. La str est donc complètement bloquée du pt de vue du mt de ses noeuds.
- Str. cinématiquement indéterminée : une structure ne répondant pas à la définition précédente i.e un certain nbre des noeuds peuvent subir des déplacements.
- Blocage simple : une liaison imposant en un noeud un déplacement nul dans une direction donnée. Si un noeud a N degrés de liberté par exemple, un blocage simple supprime un degré, ramenant à $N-1$ les degrés de liberté du noeud.
- Degré d'indétermination cinématique : un nombre représentant le total des blocages simples effectués sur une structure pour la ramener à une str. cinématiquement déterminée. Comme chaque blocage simple supprime un déplacement inconnu, ce degré

représente le arbre d'inconnues cinématiques de la str.

- Str. cinématique de référence: une structure cinématiquement déterminé de base à l'étude, par la méthode de déplacement, de la structure donnée qui servira.

Il est important de remarquer que, une fois fixé le degré d'indétermination cinématique de la str. à analyser, la structure cinématique de référence est unique.

On définit en outre les notations suivantes:

m : le degré d'indétermination cinématique

C_0 : désigne la structure cinématique de référence

D_j avec $j = 1, \dots, m$: désigne les m inconnues cinématiques

P_i avec $i = 1, \dots, m$: désigne les m forces extérieures agissant aux noeuds et correspondant aux déplacements D_i

R_{mq} : i ou j désigne 1 ddl d'un noeud j dans une direction déterminée et non un noeud.

Supposons qu'un noeud ait N degrés de liberté. Le déplacement D et la force P en ce noeud se décomposent en N composantes D_j et P_i .

D'autre part, outre les forces P_i qui s'appliquent aux nœuds, la structure peut être chargée par des forces extérieures agissant entre les nœuds.

- Application

Dans le cas d'une structure plane formée de barres rectilignes, un nœud i a une section quelconque J possède trois d.d.l. (2 translations et une rotation) donc au sens général 3 déplacements possibles d_i .

Pour les dites structures l'élément j de base cinématiquement déterminé est une poutre bi-encastée.

En effet ces deux nœuds extrêmes A et B sont complètement bloqués et s'ils subissent un déplacement connu (après déblocage), le déplacement et les efforts intérieurs de tous les pts peuvent être trouvés facilement.

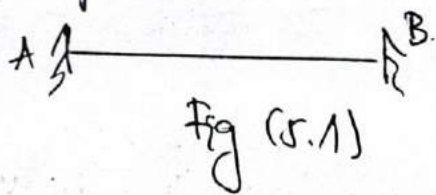


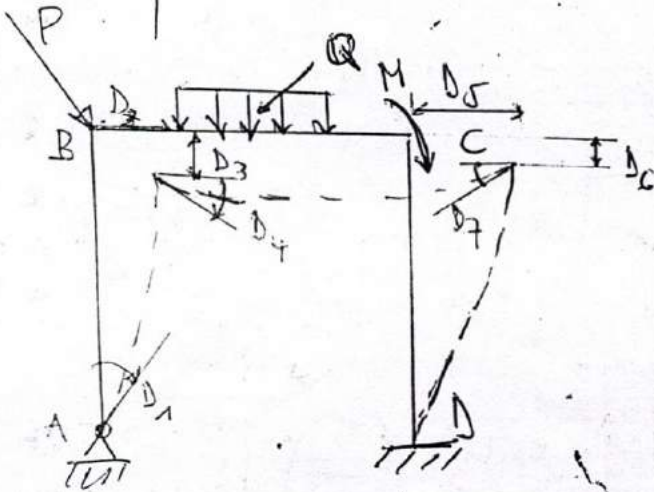
Fig (5.1)

D'une façon générale, la connaissance des déplacements en un certain nombre de nœuds de la str. permet de trouver les déplacements et les efforts intérieurs en tout pt de la structure.

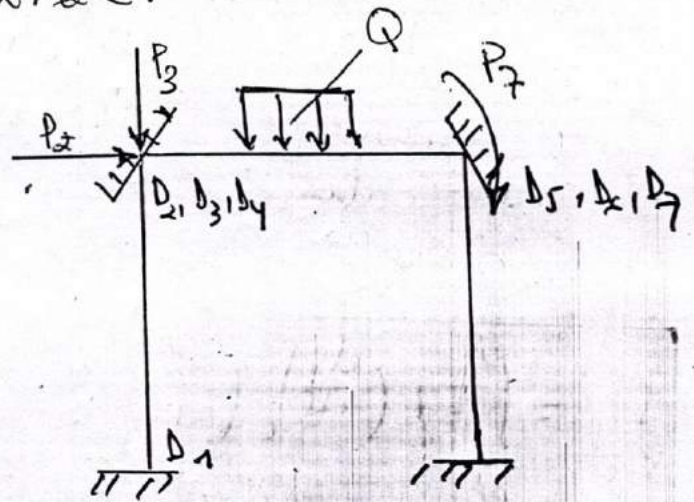
L'objet de la méthode des déplacements est de déterminer ces m déplacements inconnus.

Etant donné une str. on devra y choisir comme nœud le pt de rencontre de deux ou plusieurs barres et le pt d'appui où les déplacements sont possibles.

Cependant, on pourra aussi choisir comme noeud un point quelconque sur une barre g/g (méthode des éléments finis). On effectuera en chacun de ces noeuds tous les blocages simples successifs nécessaires à transformer la structure donnée en une str. cinématiquement déterminée.



a) structure donnée + déformée



b) structure G_0

Noeud	# de degrés # blocage simple	Inconnues
A	1	$D_1 = \text{rot}$, $D_2 \text{ et } D_5 = \text{translation horizontale}$
B + C	3 + 3	$D_3 \text{ et } D_6 = \text{translation verticale}$ $D_4 \text{ et } D_7 = \text{rotations}$

$m = 7.$

5.2.2 coefficients k_{ij} et k_{ip}

Par ds_j , on appelle coeff. de rigidité et on note k_{ij} la réaction produite à l'endroit du blocage i dans la direction i par un déplacement (trés) unité $b_j = 1$;

Par conséquent, on peut calculer k_{ij} par le théorème de déplacement unité.

Pour une structure élastique linéaire plane formée des barres, l'équation (2.15) s'écrit :

$$k_{ij} = \int_0^L EI \left(\frac{d\phi}{ds} \right)_i \left(\frac{d\phi}{ds} \right)_j ds + \int_0^L EA \left(\frac{du}{ds} \right)_i \left(\frac{du}{ds} \right)_j ds + \int_0^L EA^* \left(\frac{dv}{ds} \right)_i \left(\frac{dv}{ds} \right)_j ds \quad (5.1)$$

où $\left(\frac{d\phi}{ds} \right)_i$, $\left(\frac{du}{ds} \right)_i$, $\left(\frac{dv}{ds} \right)_i$ représente les déformations courantes virtuelles dues à $b_j = 1$

et $\left(\frac{d\phi}{ds} \right)_j$, $\left(\frac{du}{ds} \right)_j$, $\left(\frac{dv}{ds} \right)_j$ représente les

déformations courantes réelles dues à $b_j = 1$ (déplacement imposé).

Les coeff. de rigidité possèdent de la propriété suivante qui résulte du théorème de réciprocité de Betti - Maxwell ; $k_{ij} = k_{ji}$. (5.2b)

On définit de la même manière et on note k_{ip} le coeff. représentant la réaction produite à l'endroit du blocage p

dans la direction i , par les forces extérieures F_i et les forces

Par conséquent on peut calculer k_{ij} par le th. de déplacement réciproque. Pour les structures élastiques linéaires planes formées de barres, on a :

$$k_{ij} = \int_0^L EI \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right)_i \left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right)_j ds + \int_0^L EA \left(\frac{du}{ds} \right)_i \left(\frac{du}{ds} \right)_j ds + \int_0^L GA^* \left(\frac{dv}{ds} \right)_i \left(\frac{dv}{ds} \right)_j ds \quad (5.3)$$

où $\left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right)_i$, $\left(\frac{du}{ds} \right)_i$, $\left(\frac{dv}{ds} \right)_i$ représentent de nouvelles déformations courantes virtuelles dues à $D_i = 1$; et

$\left(\frac{d^2\phi}{ds^2} \right)_j$, $\left(\frac{du}{ds} \right)_j$, $\left(\frac{dv}{ds} \right)_j$ représentent les déformations courantes réelles dues à $P_j = 1$ entre nœuds.

Remq : lorsqu'on applique la méthode de déplacement les coeff. k_{ij} et k_{ip} se calculent de la structure cinématiquement déformée de référence C_0 .

5.2.3. Equations générales de la méth. des déplac

considérons une structure, et soient C_0 la str. cin. de réf. qui lui est associée et D_j avec $j = 1, \dots, m$ les m cinématiques.

Les la str. bloquée C_0 en considérant les forces agissant à l'endroit du blocage simple i (de la direction i) d'un certain nœud de la direction i .

Ces forces sont :

- les rx produites par chaque déplacement cherchée D_j qui valent $k_{ij} D_j$ en vertu de la définition de k_{ij}
- la rx due aux forces extérieures aux nœuds k_{ip} .

En vertu du principe de superposition des forces, la rx totale en i de la direction i vaut

$$k_{ij} D_j + k_{ip} = k_{i1} D_1 + k_{i2} D_2 + k_{i3} D_3 + \dots + k_{im} D_m + k_{ip}$$

or le nœud considéré doit être en équilibre. En exprimant ce fait à la direction i , la rx totale précédente doit faire équilibre à la force extérieure concentrée P_i agissant directement sur ce nœud de la direction i . On a donc pour les blocages simples i des nœuds, $i=1, \dots, m$

$$k_{ij} D_j + k_{ip} = P_i \quad (j=1, 2, \dots, m \text{ et } i=1, 2, \dots, m) \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) présente un système de m équations linéaires aux m inconnues D_j .

Ces équations sont celles générales de la méthode de déplacements - elles approximent les équations d'équilibre des membres, relatives au déplacements

D_j ou on appelle matrice de rigidité de la structure et on note $[K]$ le tableau des coeff. K_{ij} des inconnues D_j de la méthode des déplacements. Cette matrice est carrée $m \times m$ et symétrique (voir formule (5.2b)). Si l'on désigne par $\{D\}$ le vecteur colonne représentant les inconnues D_j et par $\{P\}$ celui représentant les second membres P_i - le syst. s'écrira

$$[K] \{D\} = \{P\}$$

La solution de ce syst. s'obtient par l'inversion de $[K]$, ce qui donne

$$\{D\} = [K]^{-1} \{P\}$$

Cette présentation matricielle est employée dans la formulation de la méthode des déplacements en vue de son application par l'ordinateur.

5.3. Méthode des forces

5.3.1. Définitions

On appelle :

- Inconnue hyperstatique : les inconnues de la méthode des forces. Ce sont les forces intérieures inconnues en certains noeuds de la str. étudiée
- Structure statiquement déterminée ou hyperstatique : une structure où les forces intérieures peuvent être toutes déterminées à partir des seules équations d'équilibre. C'est aussi une structure dont les inconnues hyperstatiques sont toutes imposées nulles.
- Str. statiquement indéterminée ou hyperstatique : une str. ne répondant pas à la déf. précédente, ainsi les eq. d'équilibre font insuffisantes pour trouver toutes les forces intérieures.
- Corps simple : la suppression d'une liaison qui imposait à un noeud une force intérieure inconnue dans une direction donnée.
Si en un noeud existe par ex. N inconnues hyperstatiques, une coupe simple fait disparaître une inconnue hyperstatique, ramenant à $N-1$ le nbx des forces inconnues en ce noeud.
- Degré d'indétermination statique ou

degré d'hyperstatatix: un hbre répar-
 sentent le total des coupures simple
 à effectuer ds une str. pour la
 ramener à une str. isostatique.
 Comme chaque coupe simple supprime une
 force latérale inconnue, ce degré
 est le hbre d'inconnues hyperstatiques de
 la structure.

- Structure statiquement déterminée ou isos-
 tatique de référence: une structure
 isostatique qui servira de base à l'étude
 par la méthode des forces. Contrairement
 à la méthode de déplacements il existe
 plusieurs structures isostatiques de réfé-
 rence possibles car on peut pratiquer
 les coupures simples de multiples façons.

- on définit également les notations
 suivantes:

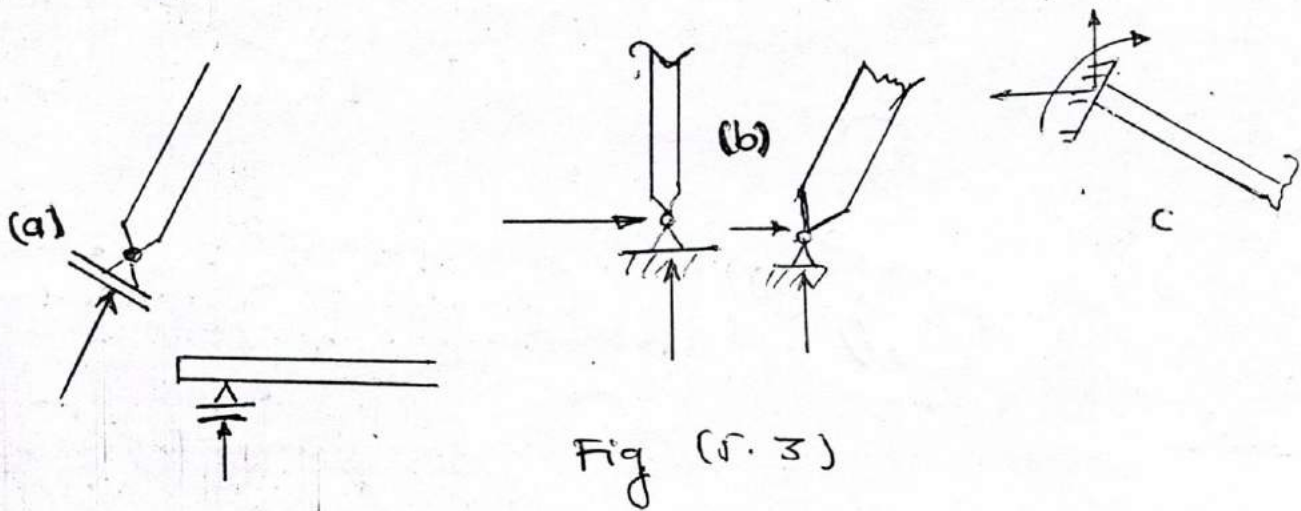
- n : le degré d'hyperstatatix
- S_0 : la structure isostatique de référence
choisie.
- X_j : avec $j = 1, \dots, n$ désigne les
 n inconnues hyperstatiques.
- d_i : $i = 1, \dots, n$ désigne les n
déplacements relatifs ds S_0 , les
levres de coupure si plus pratiques.

Application

Soit une section quelconque d'une barre (un
 noeud) d'une structure plane chargée de
 son plan, \exists trois éléments de section.

(M, N, T) i.e au sous général 3 forces
 internes inconnues X. Le nbre d'incon-
 nues introduit par un appui dépend
 du type d'un appui (fig n. 3).

- un appui à chariot (appui sur
 chariot ou appui mobile, introduit
 une inconnue. voir fig a.)
- un appui à rotule (ou appui fixe en
 une articulation) introduit 2 inconnues
 voir fig b.
- un encastrement introduit 3 inconnues
 voir fig c.



Les structures de base statiquement déterminées sont :

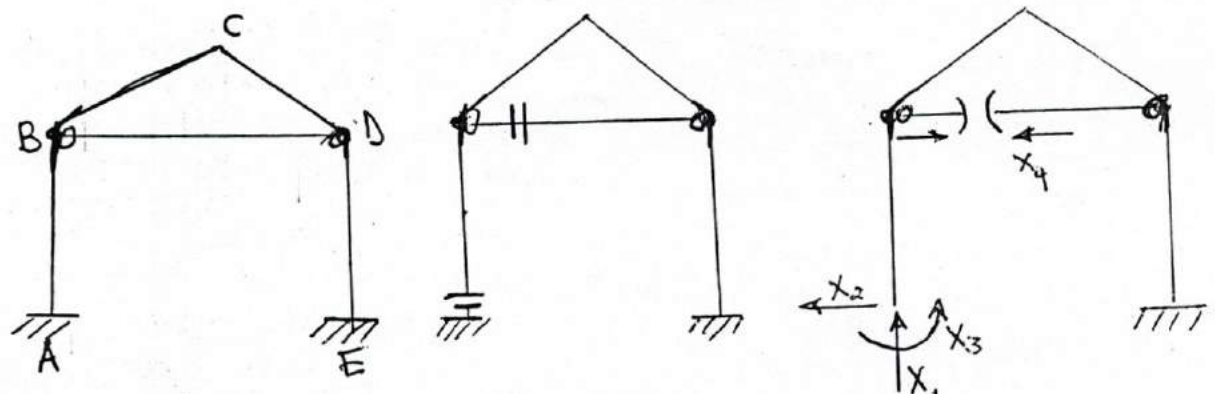
- la poutre à 2 appuis simples ; et la poutre console ainsi que les systèmes isostatiques comportant des rotules (ou articulations) intérieures telles que les poutres cantilever (continues mais isostatiques), arcs à 3 rotules (à extrémités et au milieu).

Donc de façon générale, la connaissance des forces en un certain nombre de noeuds d'une structure hyperstatique permet de trouver les efforts intérieurs et les déplacements en tout point de la structure ; la méthode des forces a pour but de déterminer ces n forces inconnues. Etant donné une str. hyperstatique on devra d'abord en déterminer le degré d'hyperstaticité, dans ce but, on exécutera n sur le système une série de n coupures simples n_1 qui à ce qu'on a boutisse à un syst. transformé mais statiquement déterminé i.e. isostat. L'hyperstaticité peut être extérieure si la str. a trop de liaisons avec le monde extérieure ou/et intérieure si elle a trop de liaison intérieure avec elle-même. On peut distinguer le degré d'indétermination statique extérieure n_e que l'on déterminera en premier lieu par des coupures simples au niveau des appuis, et le degré d'indétermination statique intérieure n_i que l'on trouvera ensuite par des coupures simples dans les liaisons intérieures surabondantes. Le degré d'hyperstaticité total est $n = n_e + n_i$. Enfin, comme les coupures simples peuvent être choisies en des points quelconques mais tel que le syst. n_1 se transforme pas en un système isostatique si on constate qu'il existe plusieurs syst. donnés ; on déterminera dans la suite du cours, des règles permettant de choisir au mieux, le système statique de référence afin de réduire le volume de calcul à exécuter.

app

Exemples

a. cadre encasturé avec tirant fig (r. 4.a).

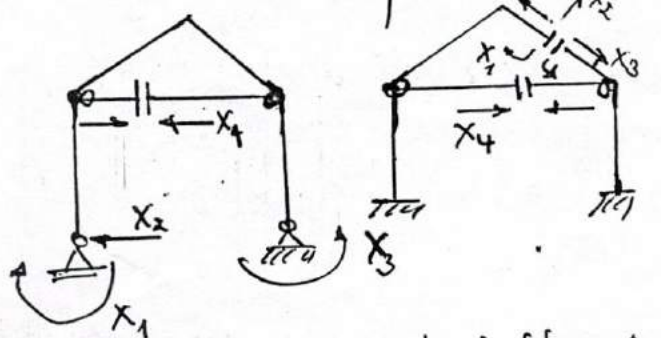


a) Structure donnée b) structure S_0 c) Extériorisation des inconnues.

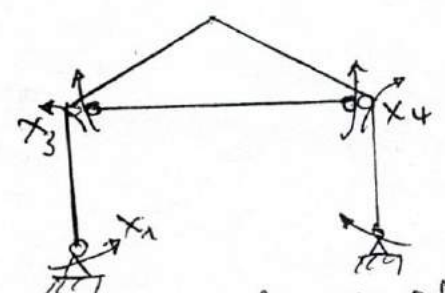
Degré d'hyperstativité	Choix des coupures	Inconnues X_i et leur définition
$n_e = 3$	3 coupures simples en A (1 coupure triple ou totale en A)	$X_1 =$ effort normal (rx verticale) $X_2 =$ " tranchant (rx. horiz.) $X_3 =$ moment fléchissant
$n_i = 1$	1 coupure simple intérieure dans le tirant	$X_4 =$ effort normal dans le tirant
Total $n = 3 + 1 = 4$ degré d'indétermination statique		

Autres systèmes

S_0 , fig (r. 5) Contre-exemple

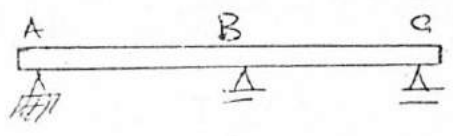


a. S_0 (type porte ... à 2 appuis simples)
b. S_0 (type 2 consoles)



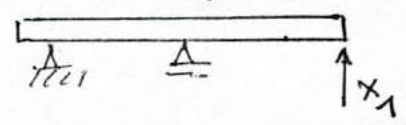
S_0 est incorrect, en effet la partie centrale reste hyperstatique.

b. Poutre continue

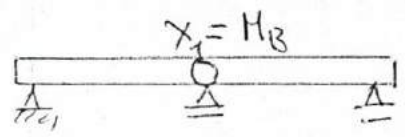


(a) Structure donnée

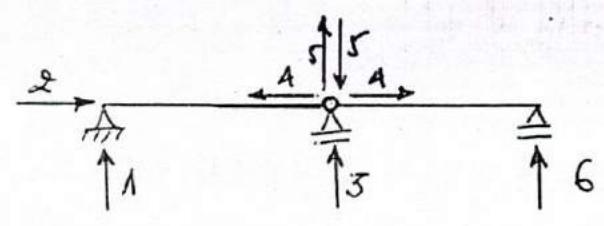
Fig (5.6)



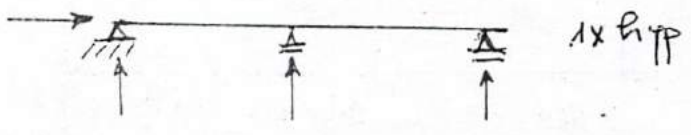
b) S_0 (type poutre à 2 appuis)



c) S_0 (type 2 poutres à 2 appuis)



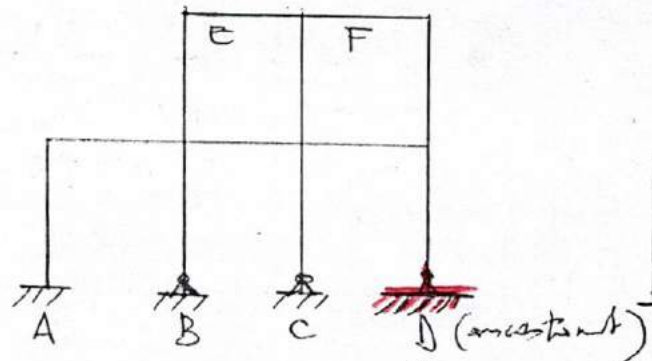
150



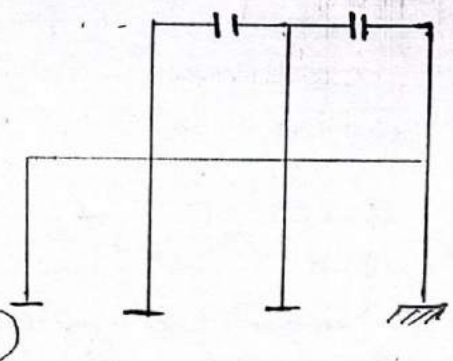
1x hyp

c) Ossature

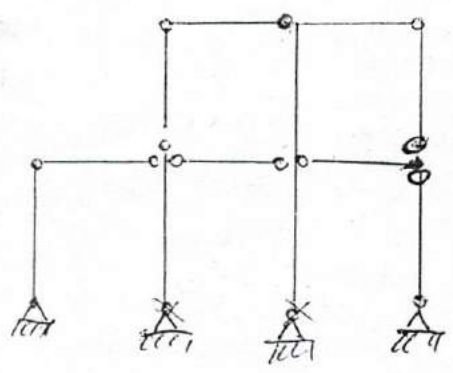
Fig (5.7)



a) ossature donnée



b) S_0 (type control) $n = 13$



c) S_0 (type articulé)

voir d) et e) voir p. 40.

commentaires sur les coupures, cas b.

1) Suppression des liaisons extérieures en A, B, C ($n_e = 7$) par des coupures triples A, E et F et des coupures doubles en B et C d'où $n = 13$, fig (5.7, b)

2. cas c, suppression de 13 liaisons internes relatives au moment de flexion par 13 coupures simples. $n = n_i = 13$.

5.3.2. Coefficients f_{ij} et f_{ji}

et par déf. on appelle coefficient de flexibilité le déplacement relatif des levres de la j coupure i dans la direction i due à une force unité (réelle) $X_j = 1$ agissant sur la coupure j dans la direction j .

On peut calculer ce déplacement par le th. de la force unité. Pour une str. élastique linéaire plane formée des barres, l'équation (2.30) s'écrit ici :

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int_0^L \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int_0^L \frac{T_i T_j}{GA^*} ds \quad (5.7)$$

où M_i, N_i et T_i sont des éléments de réduction virtuels dus à la sollicitation virtuelle $X_i = 1$ et M_j, N_j et T_j sont des éléments de réduction courants réels dus à la sollicitation réelle $X_j = 1$.

$f_{ij} = f_{ji}$ (formule de Maxwell) (5.8) (à voir)

On définit de la même façon et on note f_{ij} les coefficients représentant les déplacements relatifs des bords i dans la direction i produit par toutes les forces extérieures. Pour le cas d'une structure élastique linéaire plane formée des barres on a :

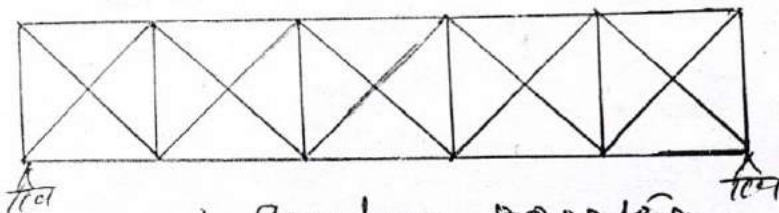
$$f_{ij} = \int_0^A \frac{M_i M_p}{EI} ds + \int_0^A \frac{N_i N_p}{EA} ds + \int_0^A \frac{T_i T_p}{GA^*} ds \quad (5.9)$$

a) M_i, N_i et T_i sont des éléments de réduction courant dus à la charge virtuelle unitaire $X_i = 1$,
 M_p, N_p et T_p sont des éléments de réduction courant réels dus à la charge extérieure

b) ~~Poutre en treillis à diagonales croisées (en croix de Saint André) fig 5.8 a~~

Remq : Lorsqu'on applique la méthode des forces, les coefficients f_{ij} et f_{ji} se calculent dans le système de référence S_0 .

d) Poutre en treillis à diagonales croisées (en croix de Saint André); fig 5.8 a.



a) structure proposée

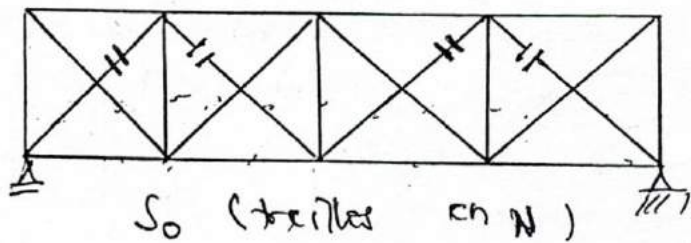


Fig (5.8)

1) Cas de systèmes et sollicitations extérieures symétriques ou antisymétriques par rapport à un ou plusieurs axes.

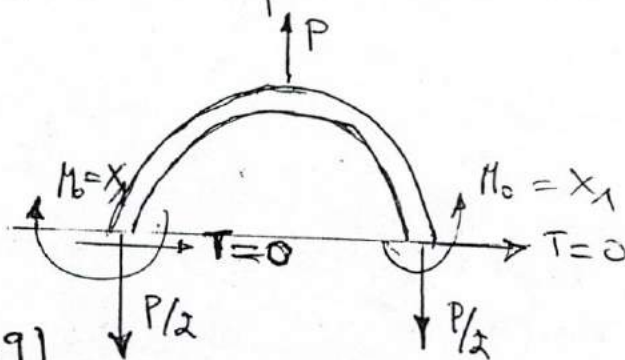
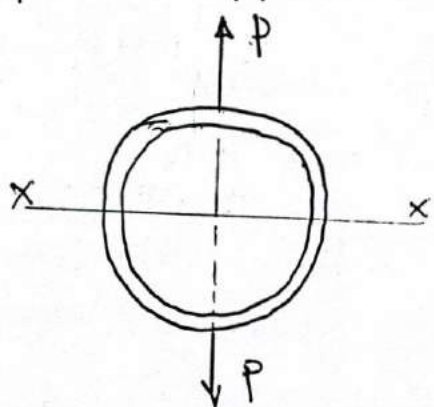


Fig (5.9)

Le degré d'hyperstatisme peut se retrouver réduit.

La structure S_0 peut ensuite être sollicitée par la charge extérieure plus les inconnues hyperstatiques X_j et les déplacements relatifs des coupures simples sont déterminés. En exprimant que dans chaque coupe simple le déplacement relatif réel des lèvres doit être nul, on détermine les X_j dont la connaissance permet de trouver les efforts internes et déplacements en tout points de la structure.

5.3.3. Equations générales

Soient une structure, So la str. statiquement déterminée de référence qui lui est associée et X_j ($j=1, \dots, n$) les n inconnues hyperstatiques. dans So les déplacements relatifs de et leurs d'une coupe i d'un nœud dans la direction i se compose :

- des déplacements produits par X_j qui valent $f_{ij} X_j$ par déf. de f_{ij}
- des déplacements produits par les forces extérieures F_{ip} .

En vertu du principe de superposition des déplacements, le déplacement total d_i vaut :

$$d_i = f_{i1} X_1 + f_{i2} X_2 + \dots + f_{in} X_n + F_{ip}$$

or en réalité les et leurs de la coupe i ne subissent aucun déplacement relatif. dans la structure So chargée des forces extérieures et des inconnues X_j , toutes les coupes doivent être fermées. C'est ce qu'on appelle le principe de continuité des coupes. Cette condition de compatibilité de déplacement s'écrit

$d_i = 0$ pour toutes les coupes $i, i=1, \dots, n$:

$$f_{ij} X_j + F_{ip} = 0 \quad (j=1, \dots, n \text{ et } i=1, \dots, n) \quad (5.10)$$

L'équation (5.10) représente un syst. de n équations linéaires à n inconnues X_i . Ces eq. sont les équations générales de la méthode des forces. Elles représentent les équations de compatibilité des déplacements relatives aux n couples simples i .

On appelle matrice de flexibilité de la structure et on note $[F]$ le tableau des ^{coeff.} f_{ij} des inconnues de la méthode des forces. Cette matrice est carrée $[n \times n]$ et symétrique (voir 5.8).

Si l'on désigne $\{X\}$ le vecteur colonne représentant les inconnues et par la matrice $\{A\}$ celui représentant les 2nd membres ou termes indépendants $- f_{ij}$, l'équation (5.10) peut s'écrire matriciellement :

$$[F]\{X\} = \{A\} \quad (5.11)$$

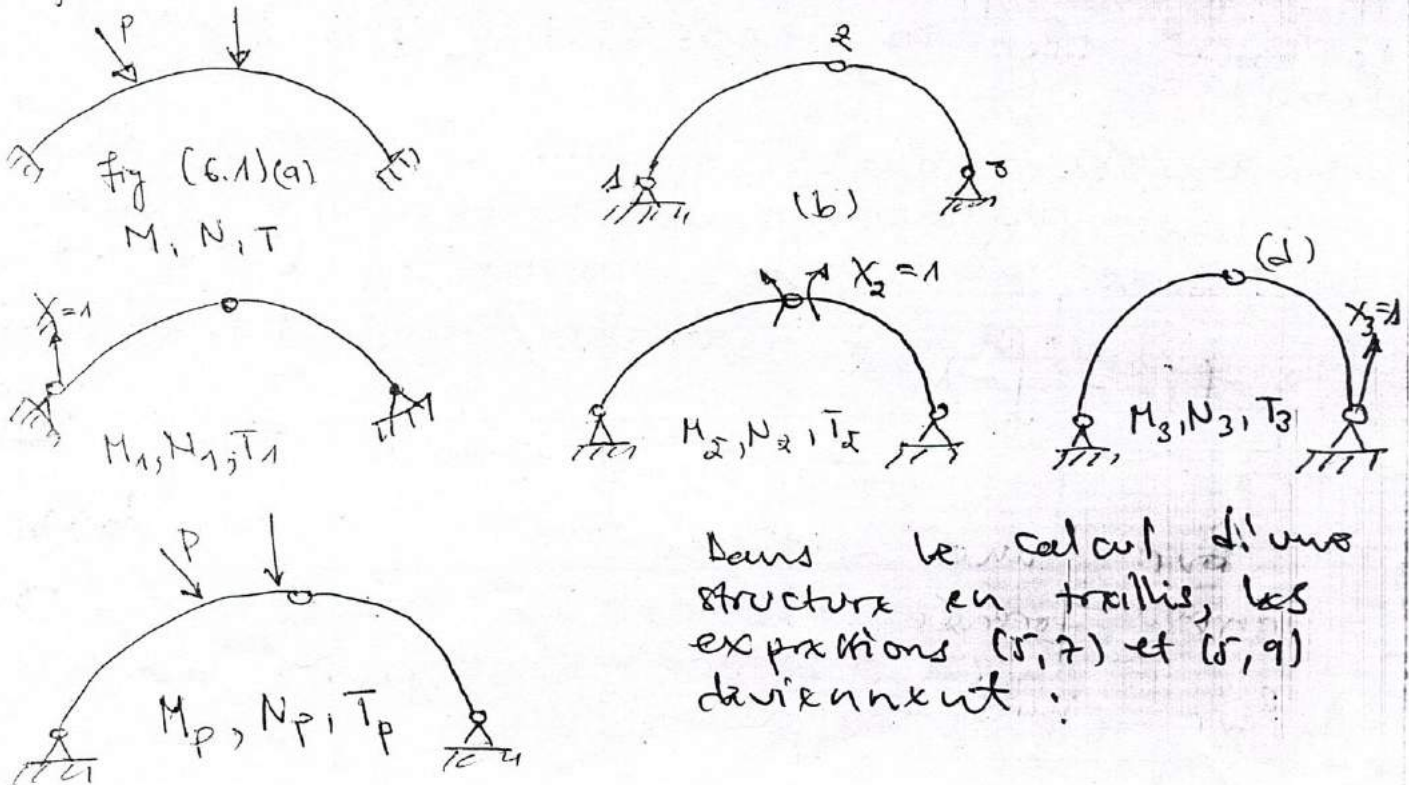
La solution de ce syst. peut s'obtenir par l'inversion de $[F]$:

$\{X\} = [F]^{-1} \{A\}$. Cette procédure matricielle est employée dans la formulation de la méthode des forces en vu de son application sur ordinateur.

CHAP VI. DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES FORCES ET SES APPLICATIONS ELEMENTAIRES

6.1. Quelques considérations additionnelles sur le calcul des coefficients f_{ij} et f_{ip}

Si l'on veut par exemple étudier (calculer) un arc bipoutre (voir fig 6.1.a) on peut adopter un système isostatique de référence. L'arc a 3 degrés de liberté. Les diagrammes M_1, M_2, M_3 sont alors les diagrammes des moments obtenus en appliquant successivement un moment, une paire de moment puis un moment unitaire aux leviers de la coupure 1, 2 et 3 respectivement (voir fig 6.1.d). Le diagramme M_p est ainsi obtenu dans le système S_0 chargé des forces extérieures (voir fig 6.1.c). Il en fera de même pour N_1, N_2 et N_3, T_1, T_2 et T_3, N_p et T_p .



Dans le calcul d'une structure en treillis, les expressions (5,7) et (5,9) deviennent :

$$f_{ij} = f_{ji} = \frac{\sum N_i N_j l}{EA} \quad (5.1)$$

$$f_{ip} = \sum \frac{N_i N_p l}{EA}$$

ex. Calcul des termes indépendants de (5.10) :
 cas d'une variation de t° , d'un retrait,
 d'un mort d'appui, etc... dans une struc-
 ture hyperstatique

besoins par $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{nT}$ les déplacements relatifs des n barres des coupures 1 à n du système isostatique de référence soumis à une variation de température qui représente ici la sollicitation extérieure. f_{iT} remplace f_{ip} dans (5.10). De même si $f_{1R}, f_{2R}, \dots, f_{nR}$ définissent l'effet de retrait aux coupures n° 1 jus qu'au n° n du système S_0 , on écrit (5.10) où f_{ip} est remplacé par f_{iR} .

Comme on assimile toujours l'effet de retrait à une variation de température (voir le cas de béton armé), les f_{iT} et f_{iR} peuvent se calculer par (2.33)

$$f_{iT} = \int_0^L N_i \alpha T ds + \int_0^L M_i \frac{\alpha \Delta T}{h} ds \quad (6.2)$$

Pour une structure élastique linéaire plane formée des barres X

pour un treillis, on aura :

$$f_{iT} = \sum N_i \alpha T l_i \quad (6.3)$$

CHAP VI : DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES FORCES ET APPLICATIONS ELEMENTAIRES

VI.1. QUELQUES CONSIDERATIONS ADDITIONNELLES SUR LE CALCUL DES f_{ij} ET f_{ip}

Si on désire trouver les efforts produits par le tassement d'un appui déterminé, il suffit d'introduire dans (5.10) à la place de f_{ip} le terme indépendant f_{iA} représentant le déplacement relatif de la coupure i dû au tassement d'appui. Les quantités f_{iA} se déterminent comme dans le livre du cours par la géométrie.

L'examen de (6.2) montre que le signe de f_{iT} ou f_{iR} ou f_{iA} est positif si les déplacements réels

$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\alpha \Delta T}{h}$ et $\frac{du}{ds} = \alpha T$ ont les mêmes signes que les efforts dans \bar{X}_i virtuels H_i et N_i

✓ VI.3. Détermination numérique des f_{ij} et f_{ip} en pratique

VI.3.1. Hypothèses simplificatrices (Rappel)

En pratique dans les ponts essentiellement fléchis on néglige toujours les déformations dues à T et à N sauf dans les structures spéciales comme : Treillis, les traits, les suspentes ou il ne faut évidemment pas négliger l'effet N . sans le cas courant :

$$f_{ij} = \int_0^L \frac{M_i M_j}{EI} ds; \quad f_{ip} = \int_0^L \frac{M_i M_p}{EI} ds \quad (6.4)$$

! (voir abaque $\int_0^L M m ds$)

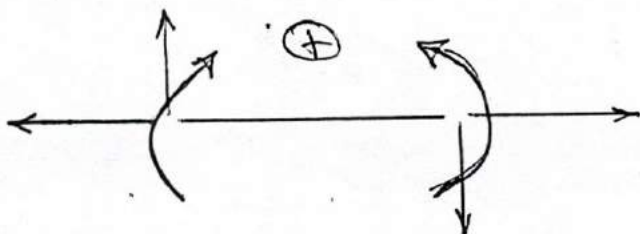
VI.3.2. Convention des signes

Les intégrales (6.4) sont indépendantes de la convention des signes des M adoptée. En effet si on inverse le signe des M ds

(4) intervenant dans le produit changeant simultanément le signe. (Le résultat ne change pas)

Rmq \times a) $\int_0^L \frac{M_i^2 ds}{EI}$ sont donc positifs

b) si on doit tenir compte de l'effet de N et de T comme pour M , la convention de signe n'a pas d'importance ; on appliquera la convention suivante :



6.3.3. Cas où les moments d'inertie sont constants par tronçon

Si on appelle t_1, t_2, \dots les longueurs des différents tronçons composant le système; on peut écrire :

$$f_{ij} = \frac{1}{EI_1} \int_0^{t_1} M_i M_j ds_1 + \frac{1}{EI_2} \int_0^{t_2} M_i M_j ds_2 + \dots$$

$$f_{ip} = \frac{1}{EI_1} \int_0^{t_1} M_i M_p ds_1 + \dots$$

6.3.4. Règle de VERECHAQUINE

Pour calculer des moments linéaire \rightarrow

$I = \int_0^l M_i M_j dx$ où l'on par exemple M_i est aff de multiplier l'aire du premier diagramme (M_i) par l'ordonnée du second (M_j) mesurée au droit du centre de gravité du premier. Voir fig (6.3)

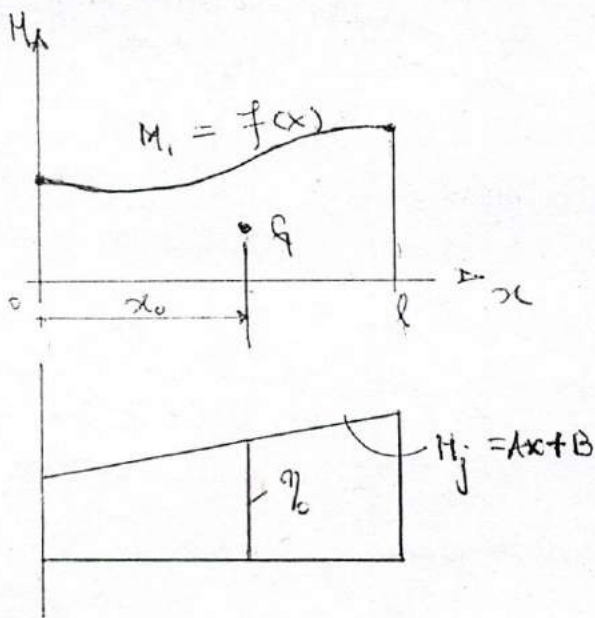


Fig (6.3)

$$I = \Omega \cdot \eta_0$$

Démonstration

$$I = \int_0^l f(x) (Ax + B) dx = A \int_0^l x f(x) dx + B \int_0^l f(x) dx$$

or $\int_0^l f(x) dx = \Omega$ (aire).

et $\int_0^l x f(x) dx = \Omega x_0$ (moment statique de Ω par rapport à M)

$$\Rightarrow I = A \Omega x_0 + B \Omega$$

$$= \Omega \underbrace{(Ax_0 + B)}_{\eta_0}$$

$$\Rightarrow I = \Omega \eta_0$$

6.3.5. Cas où les I sont variables

On calculera les intégrales (6.4) de façon approchée au moyen d'une méthode d'intégration numérique. Par exemple par la formule de Simpson. En première approximation on pose :

$$I = \int_0^l \frac{M_i(x) M_j(x)}{EI(x)} ds \cong \sum \frac{M_i M_j}{EI} \Delta s$$

Formule des rectangles. La somme s'étendant à un nombre ~~suffisamment~~ des tronçons Δs de longueur finie. Et en ayant bien soin de prendre comme points de division des tronçons de longueurs Δs tous les points où M_i, M_j et I changent brusquement.

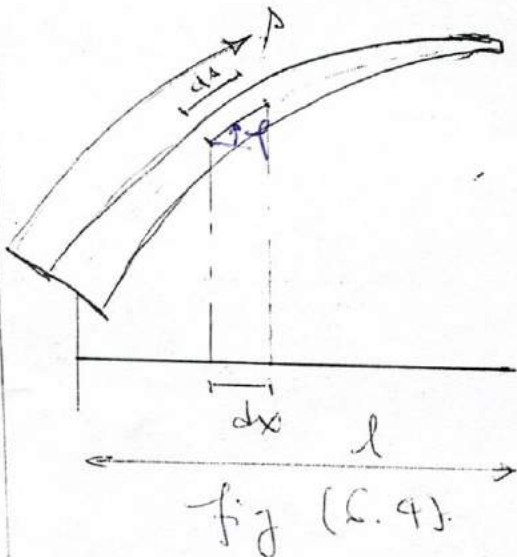
6.3.6. Cas de certaines barres courbes (voir cours de ponts spéciaux : pont bousting, 5^e SOA).

Dans certains cas des barres courbes le moment d'inertie de la barre $I(x)$ est tel que ; x étant un certain axe rectiligne :

$$I(s) \cdot \cos \varphi(s) = \bar{I}(s) \frac{dx}{ds} = J = \text{constante}$$

$$(*) I(s) \cos 0^\circ = J = \text{cte}$$

$$I(s) \cos \varphi = J \Rightarrow I(s) = \frac{J}{\cos \varphi} >$$



$$f_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI(s)} ds \quad \frac{dx}{ds}$$

avec $I(s) = \frac{J ds}{dx}$

$$\Rightarrow f_{ij} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_i M_j dx$$

J est appelé moment d'inertie réduit. dans ces conditions :

$$f_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI(s)} ds \frac{dx}{ds} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_i M_j dx$$

de sorte que l'intégrale se fera le long de l'axe x plutôt que s.

6.4. Applications élémentaires

6.4.1. Poutres continues sur appuis fixes

1. Raison de choix des moments inconnus hyperstatiques sur appuis comme

Admettons qu'on ait pris des réactions des appuis intermédiaires par exemple celle de la poutre sur un appui (fig 6.5) comme la connue hyperstat-

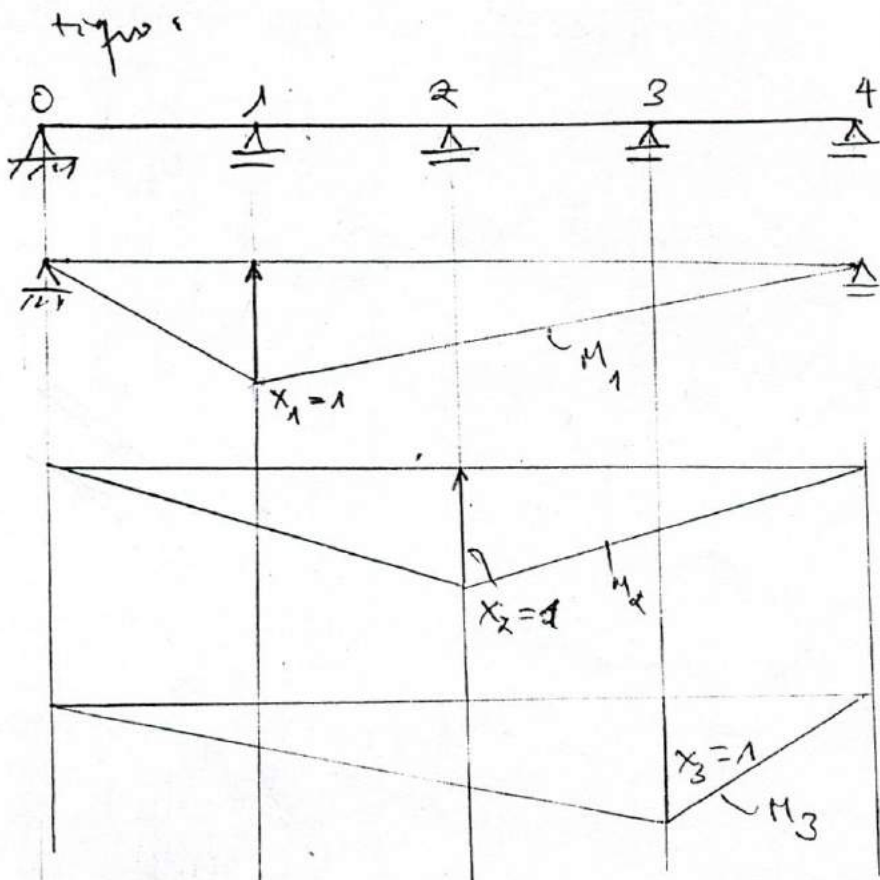


Fig (5.5)

Fig (5.6)

Les diagrammes des moments à considérer sont alors à la figure (5.6). L'inspection de ces diagrammes montre immédiatement que tous les coefficients \$f_{ij} = \int_0^L M_i M_j \frac{ds}{EI}\$ sont différents de zéro et que leur calcul sera assez long parce que le diagramme des \$M\$ s'étend sur toute la longueur de la poutre. Si au contraire on adopte comme Clapeyron en RDM comme inconnues hyperstatiques les moments aux appuis (voir fig 5.7) des effets \$X_i = 1\$ donne lieu à un diagramme des \$M\$ limité aux deux travées adjacentes à l'appui considéré. Ainsi, la \$i\$-ème équation de