Hugues Kumeso (1)

# COURS DE CALCUL DES STRUCTURES I

Prof. M. W MUTONDO

## 0. Objet du cours

C'est rechercher toutes les sollicitations i.e les efforts intérieurs autrement appelés éléments de réduction et les déplacements dans toutes les structures hyp. composées des barres droites ou courbes i.e les éléments de construction dont une dimension ~~est~~ grande par rapport aux deux autres, éléments dits à une dimension.

Pour ce, nous étudierons deux méthodes générales à savoir :

-> la methode des déplacements (avec ces deux cas particuliers : la méthode rotation et la methode de Cross ) basée sur le théorème des déplacement virtuels ou du travail virtuel.

-> et la méthode des forces basée sur le théorème des forces virtuelles ou du travail virtuel complémentaire.

Comme prérequis, nous avons les cours de Statique (1er graduat sc. Appliquées ), le cours de résistance des matériaux et d'élasticité (2e graduat.

CHAP I. GENERALITES

## 1.1. Classification générale des structures

On peut classer les structures en :

A. Selon leur forme :

a) structures en treillis : Ce sont des structures formées des barres supposés articulés et chargés aux noeuds et classés selon leur formes générales en fermes, tours, pylônes, poutres des ponts (Fig. 1.1) ou selon la forme du treillis en treillis simples (V, N, K); en croix de St André, en Losange, treillis complexes et treillis multiples (Fig. 1.2).

Fig.

b). Deuxième type de structures classée selon leur forme:

Structures formées des poutres assemblées rigidement tels que poutre, arc, ...

Fig.

c) Structures formées d'éléments à deux dimensions i.e la troisième dimension est faible par rapport aux deux autres

ex: plaques, coques (coupoles, réservoirs, silos); .. [voir calcul des Str. II]

Fig

d) Structure dont les trois dimensions sont du même ordre de grandeur (matière qui fait du présent cours)

Fig

B. Selon leur fonction

On peut les classer en :

a) construction industrielle ; ex :
hangars, cheminés, réservoirs, tuyauterie, etc.

b) ouvrages d'arts ; ponts, tunels, murs de soutement, etc.

c) Bâtiments ; Immeuble, Eglise, Stade...

d) Construction hydraulique ; barrage, Ecluse et portes d'Ecluse, vanne de Barrage les cannaux

C. Ouvrages spéciaux ;
pylones de transmissions ou de communication, tours de télévisions, panaux publicitaire, echaffaudage.

D. Selon le matériau qui les compose

- construction métallique (en acier ou duralumin)
- construction en terre (digue)
- construction en bois.
- construction en maçonnerie et construction en béton. (simple, armé ou précontraint).
- construction mixte ; Acier - Béton
- construction en plastique ou en verre

## 1.2. Idéalisation d'une structure

Avant d'aborder les calculs d'une struct on doit tjrs idéaliser cette dernière i.e. la simuler à un modèle mathématique simple. Cette idéalisation transformera la structure réelle avec toutes les imperfections qu'elle contient telles que géométrie imparfaite, fondation mal connue, etc en un schéma statique idéale où la plupart des cas imperfections sont négligées.

Fig

Ainsi par exemple le portique de la fig (1.6. a) peut être idéaliser en une structure formée d'un ensemble d'élts linéaire représentant les axes de barres, des données à la fig insistée. C'est le schéma statique servant aux calculs des sollicitations i.e efforts intérieurs et de déplacement dans ~~les~~ les expressions.

## 1.3. Actions sollicitant les structures

|| Actions : charges ou tout ce qui peut provoquer les sollicitations dans une structure.

Les actions maximales pouvant solliciter les structures sont déterminées par des normes qui sont des prescriptions officiell encore inexistant au Congo.

- En Belgique par ex, les constructions sont tenus d'appliquer les normes publiées L'IBN;
- France par AFNOR
- etc.

Les normes officielles fixent le mode de calcul des actions permanentes à considérer ainsi que l'intensité maximum de ~~surcharg~~ surcharges dues aux personnes et aux véhicules, ainsi qu'aux vents et éventuellement la neige (voir cours de Pont).

Rmqs

- Dans les charpentes, les actions précitées sont considérées comme statiques. Il faut cependant prendre en considération les effets dynamiques qui peuvent être provoqués par divers engins de manutention telles que : les ascenseurs, monte charges pour ~~les~~ marchandises
- Dans les pays sujets aux secousses sismiques comme le Japon, il faut prendre en considération leurs effets dynamiques. (voir le cours de dynamique des structures 2ème partie du cours des calculs des structures dernière année).

III,

# CHAP II. THEOREMES GENERAUX

## 2.1. Introduction.

### 2.1.1. Théorème des travaux virtuels en mécanique rationnelle

Par le cours de Mécarat nous avons appris que : " lorsqu'un corps indéformable est en équilibre la somme des travaux virtuels de toutes les forces extérieures est nulle, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons du système.

Cette théorie peut servir par exemple à chercher les réactions aux appuis d'un système isostatique (et non hyper). Il est aussi à la base de la théorie des lignes d'influence des syst. isostatiques. (où mettre la charge pour que la sollicitation cherchée soit max ou min).

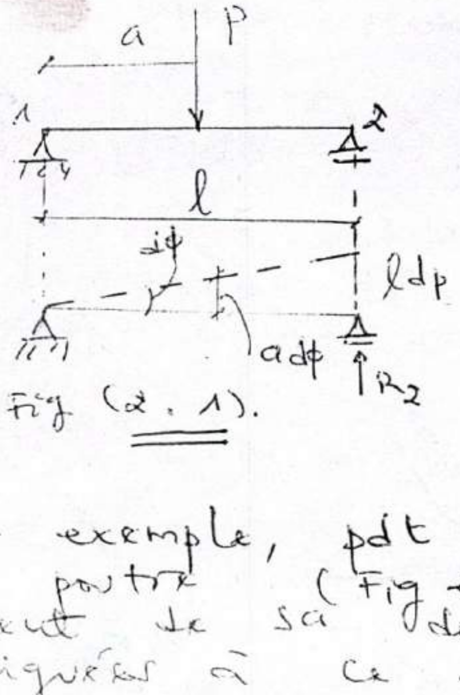



Fig (2.1).

$R_2 = ?$ $\quad - P a d\phi + R_2 l d\phi = 0$

$$\rightarrow \boxed{R_2 = \frac{Pa}{l}}$$

Le th. ci-dessus n'est pas valable telle quelle pour un système dont on considère la déformabilité (système hyperstatique).

Par exemple, soit une déformation virtuelle de la poutre (Fig 2.2) consistant en un petit accroissement de sa déformée, les forces extérieures appliquées à ce système produisent des forces suivants :

$$\delta W = P_1 \delta d_1 + P_2 \delta d_2 \quad (2.1)$$ Expression qui est visiblement non nulle.

~~On se~~

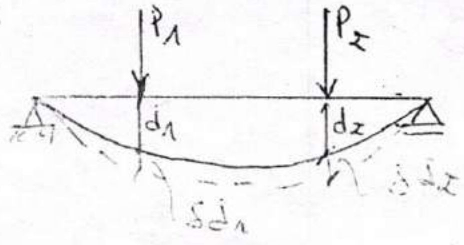



Fig (2.2)

On se propose dans ce chapitre de présenter et d'appliquer le théorème des travaux virtuels étendu aux corps déformables et le th. des travaux virtuels complémentaires, tous les deux vus dans le cours d'Elasticité. Car ils constituent la base des cours des calculs de structures. Avant de les présenter, rappelons d'abord la notion des grandeurs virtuelles.

## 2.1.2. Notion de grandeur virtuelle et travail V.

On appelle grandeur virtuelle, une grandeur très petite mais absolument arbitraire; elle est désignée par le symbole "δ." On peut la considérer aussi comme une quantité arbitraire, une fonction quelconque mais continue, sans signification physique; On peut enfin la considérer comme une variation arbitraire d'une grandeur vraie mais très très petite.

Soit par exemple la contrainte normale $\sigma_{11}$ // $x_1$. On note $\delta\sigma_{11}$ la contrainte virtuelle correspondante.

Soit un corps déformable soumis à un système d'actions donné (forces et déplacements imposés). Il se déforme de telle manière qu'à chaque instant :

- Les forces extérieures et intérieures soient en équilibres,
- Les déplacements respectent les conditions d'appuis.

Donnons maintenant à ce corps un champ de déplacement virtuel. Pendant cette déformation virtuelle les forces extérieures et intérieures vraies effectuent un travail virtuel.

Par ex; la composante $F_1 dV$ de la force de volume selon l'axe $x_1$, effectue le travail virtuel élémentaire $F_1 dV \delta u_1$ où $\delta u_1$ est le déplacement virtuel correspondant.

Réciproquement : Appliquons à ce corps de départ une distribution des forces virtuelles en équilibre. Ces dernières effectuent pendant la déformation vraie du corps due aux actions extérieures vraies, un travail virtuel dit par définition travail virtuel complémentaire.

Par ex : La composante virtuelle $\delta F_1 dV$ de la force de volume selon l'axe $x_1$ effectue le travail complémentaire $\delta F_1 dV u_1$.

## 2.2. Théorème des déplacements virtuels ou du travail virtuel des str. déformables

Considérons un solide déformable soumis à des forces de volume $\vec{F}dV$ et de surface $\vec{T}dA$. Donnons lui un champ de déformations virtuelles $\delta u_i$ qui le déplacent et le déforment, indépendamment de ces déplacements et déformations réelles. Durant ce changement virtuel de configuration, les forces extérieures vraies $\bar{F}dV$ et $\bar{T}dA$ effectuent le travail $\delta W$ suivant appelé travail virtuel extérieur

$$\boxed{\delta W = \int_V^{\delta u_i} F_i \delta u_i \, dV + \int_{A = A_a + A_c} T_i \, \delta u_i \, dA} \quad (2.2).$$

où la convention de $\Sigma$ de Einstein et d'application

où $V$ = volume du corps, $A$ = surface du corps.

Dans (2.2), la première intégrale triple s'étend à l'ensemble des éléments de volume $dV$ du corps entier $V$ et la 2nde intégrale double s'étend à toute la surface extérieure $A$ du solide.

$$A = A_c + A_a \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_a = \text{surface des appuis} \\ A_c = \text{surface des chargements éventuels.} \end{cases}$$

On appelle travail virtuel de déformation ou travail virtuel intérieur et on note $\delta U$, l'expression

$$\boxed{\delta U = \int_V \sigma'_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV} \qquad (2.3)$$

où : → $\sigma'_{ij}$ : champ des contraintes pas nécessairement vraies mais en équilibre avec les forces extérieures appliquées réelles $F_i\, dV$ et $T_i\, dA$ i.e un champ statiquement admissible.

En général on prend le champ des contraintes vraies noté $\sigma_{ij}$.

→ $\delta\varepsilon_{ij}$ : Le champ de déformation virtuel du aux déplacements virtuels $\delta u_i$ i.e un champ cinématiquement admissible si $\delta u_i$ qui est continue et dérivable, respecte en plus les conditions d'appuis comme c'est généralement le cas.

Rmq : En générale les appuis sont fixes i.e $\delta u_i = 0$ sur $A_a$ d'où $A = A_c$

Dans le cours d'élasticité, on démontre que $\delta W = \delta U$, i.e

$$\boxed{\int_V F_i\, \delta u_i\, dV + \int_A T_i\, \delta u_i\, dA = \int_V \sigma'_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV} \qquad (2.4)$$

l'équation (2.4) constitue le th. de travail virtuel qui s'énonce :

« si un corps déformable est en équilibre, le travail virtuel extérieur est égale au travail virtuel intérieur pour tout champ de déplacement virtuel continu et dérivable ».

Remarques

1. Le th. de déplacement (ou du travail) virtuel est une expression de l'équilibre du

corps, c'est donc une condition nécessaire et suffisante pour garantir l'équilibre du corps. Son application pratique conduit à des équations d'équilibre.

2. La démonstration du th. de déplacement virtuel ne dépend pas de la nature du matériau. Le th. est donc applicable quelle que soit la nature du matériau; aussi aux corps plastiques par exemple. D'où le th. est la base du calcul plastique des str. (voir 2e partie du cours de calcul de str. 3)

3. Si le champ de déplacement virtuel est compatible autrement appelé cinématiquement admissible i.e en plus d'être continue et dérivable il respecte les conditions d'appuis; en général les appuis étant fixes d'où $\delta u_i = 0$ sur $A_a$ l'équation (2.4) devient

$$\boxed{\int_V F_i \delta u_i \, dV + \int_{A_c} T_i \delta u_i \, dA = \int_V \sigma'_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV} \quad (2.5)$$

En général le champ de déplacement virtuel respecte les conditions aux appuis si bien que dans l'énoncé du th. des déplacements virtuel les termes " continu et dérivable" sont remplacés par " cinématiquement admissible".

## 2.3. Expressions explicites des travaux $\delta U$ et $\delta W$

### 2.3.1. Expression explicite de travail virtuel de déformation $\delta U$

Sous le signe intégrale de volume dans l'expression de $\delta U$ (2.3), les contraintes $\sigma'_{ij}$ dues aux efforts intérieurs $N', T', M'$ et $M'_t$

peuvent être remplacées par ces derniers par suite d'une intégration sur l'aire de la section droite A de la poutre, de sorte que l'intégrale de volume par rapport à l'élément de volume $dV = dA \cdot dx$ se ramène à une intégrale simple sur l'axe de la poutre de longueur L.

Si $\in$ désigne un effort intérieur quelconque on peut écrire la relation (2.3) de la façon suivante :

$$\boxed{\delta U = \int_V \cdots \, dV = \int_L \left( \int_A \cdots dA \right) \cdot dx = \int_L (\in) \cdots dx} \quad (2.6)$$

A ces efforts intérieurs $\in$ s'associent les grandeurs mécaniques et cinématiques propres aux barres et aux poutres et rappelées dans le tableau suivant (revoir cours RDM)

| Contrainte | Effort Intérieur | ⟷ Déplacement | Déformation |
|---|---|---|---|
| $\sigma = \frac{N}{A}$ | N | $du$ | $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ |
| $\tau = \frac{T \cdot S_n}{I \cdot b}$ | T | $dv$ | $\gamma_m = \frac{dv}{dx}$ |
| $\tau = \frac{M_t}{2\Omega t}$ | $M_t$ | $d\psi$ | $\theta = \frac{d\psi}{dx}$ |
| $\sigma = \frac{My}{I}$ | M | $d\phi$ | $\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$ <br> $\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2}$ |

tableau (2.1)

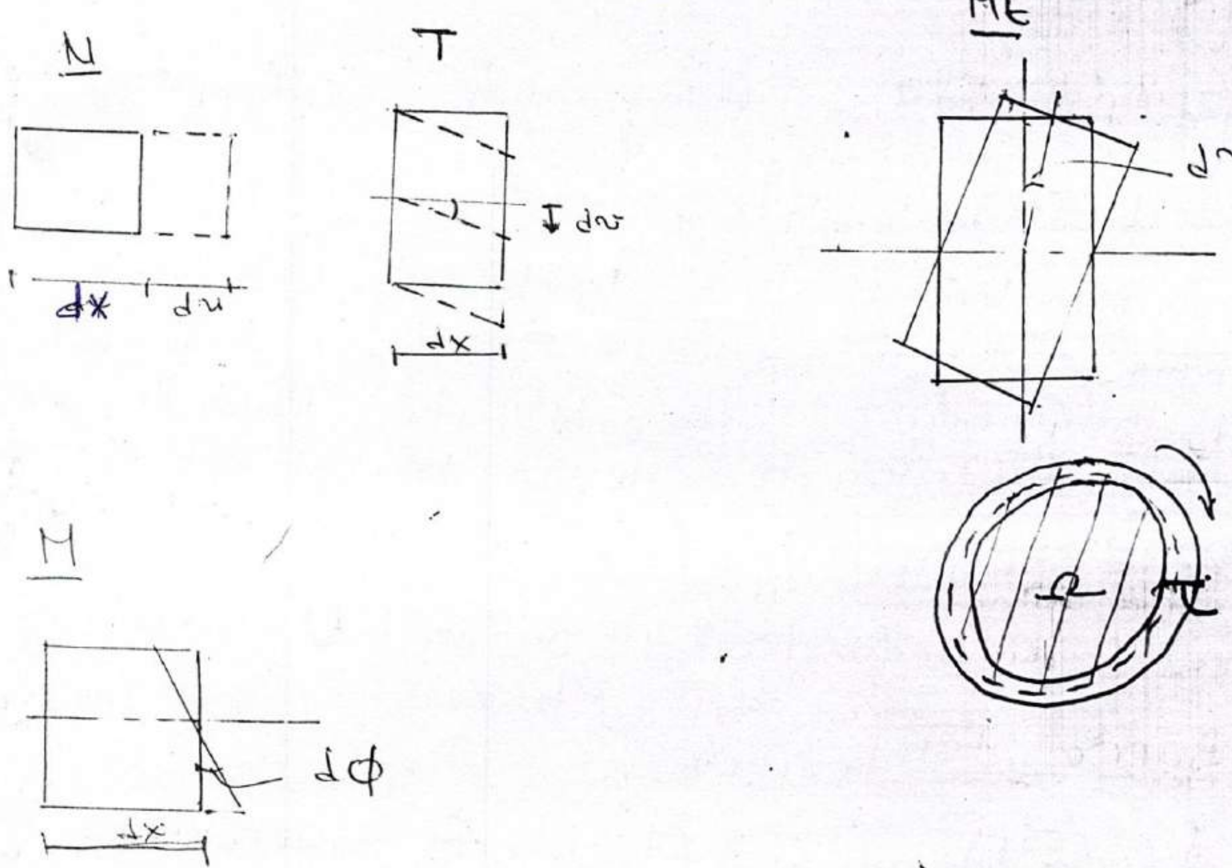



Fig (2.3)

## A. Barres de treillis tendue ou comprimée

Soit N' l'effort de traction existant dans la barre de section A et de longueur L.

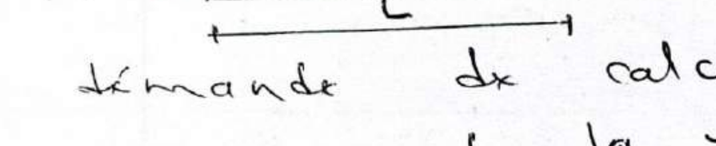



Fig (2.4).

On demande de calculer $\delta U$.

par application de la formule (2.6) en considérant que l'état de contrainte et de déformation est uniaxiale en traction i.e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \; (= \varepsilon_{11} = \varepsilon_x)$

$$\delta U = \int_V \sigma \, \delta\varepsilon \, dv = \int_L \left( \int_A \frac{N'}{A} \, dA \right) \frac{\delta (du)}{dx} \cdot dx$$

$$= N' \int_L \delta \, du \quad = N' \delta u$$

où $\int_L d(\delta u) = \delta u$ (allongement virtuel total)

et $d(\delta u)$ = allongement virtuel élémentaire.

ou simplement si la barre sollicitée par $N'$ subit un allongement virtuel $\delta u$ arbitraire et indépendant de $N'$, le travail virtuel de la déformation de la barre vaut

$$\boxed{\delta U = N' \delta u}$$

Dans le cas du treillis on a $\boxed{\delta U = \sum N' \delta u}$

où la sommation est étendue à toutes les barres du treillis.

B. Barre tendue, fléchie et cisaillée

Soient $N'$ l'effort normal courant, $M'$ le moment fléchissant courant et $T'$ l'effort tranchant courant dans la barre. Au vu de ce qui précède on peut le démontrer aisément que $\delta U$ est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\delta U = \int_0^{\Delta} N' d(\delta u) + \int_0^{\Delta} M' d(\delta \phi) + \int_0^{\Delta} T' d(\delta v)} \quad (2.7)$$

où l'intégrale est étendue à toutes les barres de la structure dont la longueur totale est $\Delta$.

L'expression (2.7) devient pour les sollicitations dans l'espace et en toute généralité :

$$\boxed{\begin{aligned}\delta U = \int_0^{\Delta} N' d(\delta u) + \int_0^{\Delta} M'_y d(\delta \phi_y) + \int_0^{\Delta} T'_y d(\delta v) + \int_0^{\Delta} M'_z d(\delta \phi_z) \\ + \int_0^{\Delta} T'_z d(\delta w) + \int_0^{\Delta} M'_t d(\delta \psi)\end{aligned}} \quad (2.8)$$

Hugues Kumeso (7) CS 8

## II.3.2. Expression explicite du travail virtuel extérieur $\delta W$

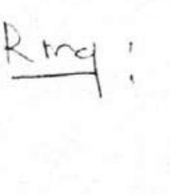
Le travail virtuel des forces extérieures peut se décomposer en travaux virtuels des charges directement appliquées sur la structure $P'$ et celui des ~~la~~ réactions d'appui $R'$.

$$\boxed{\delta W = \Sigma P'\delta d - \Sigma R'\delta r} \qquad (2.9)$$

Rmq : Les charges extérieures sont notées avec prime ($'$) pour des raisons qui vont suivre (voir 2.11).

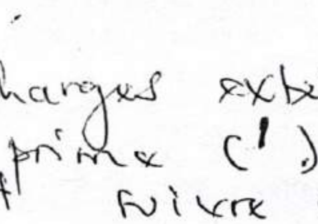
où $\delta d$ et $\delta r$ représentent les déplacements virtuels des points d'application des forces dans (~~dans~~) la direction de ces forces. Comme il est courant de noter les $r$ positivement dans le sens opposé au sens positif des réactions $R'$ ce qui correspond à un tassement des appuis, il faut faire précéder du signe (−) le travail de ces forces $R'$

Ex



$$\boxed{\delta W = -R'\delta r}$$

Fig(2.6)



$$\boxed{\delta W = -H'\delta h - V'\delta v - M'\delta\alpha}$$

(Fig. 2.7).

En particulier un appui à rotule (voir fig. 2.6) donnera lieu au travail $\delta W = -R'\delta r$ où $\delta W$ ~~est~~ le travail virtuel Suite aux déplacements virtuels projeté sur la ligne d'action de $R'$ et mesuré positivement dans le sens contraire de $R'$.

Dans le cas d'un encastrement voir fig. 2.7, on décomposera la résultante en ces composantes horizontale $H'$ et verticale $V'$ et un couple de moment $M'$. On aura l'expression

$\delta W = -H'\delta h - V'\delta v - M'\delta\alpha$ où

$\delta h$, $\delta v$ et $\delta\alpha$ sont les déplacements positifs horizontal, vertical et la rotation subie par l'encastrement dans le sens opposés aux sens positifs de $H'$, $V'$ et $M'$ respectivement.

Notons que dans la fig 2.6 on peut aussi travailler avec les composantes de $R'$

Rmq : $P'$ et $\delta d$ sont comptés positifs vers le bas

## 2.4. Expression explicite du th. des déplacements virtuels pour les corps déformables.

En remplaçant le travail virtuel de déformation et le travail virtuel extérieur par leurs expressions (2.3) et (2.9) dans (2.4.1) on obtient la forme explicite de l'expression du th. des déplacements virtuels pour les corps déformables:

" si un corps déformable est en équilibre, on a :

$$\boxed{\Sigma P'\delta d - \Sigma R'\delta r = \int_V \sigma_{ij}' \, \delta \varepsilon_{ij} \, dv} \quad (2.10)$$

où $\sigma_{ij}'$ représente un champ des contraintes statiquement admissible correspondant aux forces extérieures $P'$ et $R'$

et $\delta \varepsilon_{ij}$ représente un champ de déformation virtuel cinématiquement admissible correspondant aux déplacements virtuels $\delta d$ et $\delta r$

En opérant comme ci-dessus mais en adoptant pour $\delta U$ l'expression (2.7) on trouve la forme explicite du th. des déplacements virtuels pour les struct. déformables sollicitées dans le plan et formées des barres. C'est le cas particulier de (2.10)

$$\boxed{\sum P' \delta d - \sum R' \delta r = \int_0^s M' d(\delta \phi) + \int_0^s N' d(\delta u) + \int_0^s T' d(\delta v)}$$

(2.11).

Cette équation est valable pour n'importe quel état de sollicitation en équilibre (statiquement admissible) défini par les valeurs des symboles $P', R', M', N', T'$ et pour tout état de déformation virtuelle cinématiquement admissible, caractérisé par des valeurs $\delta d$, $\delta r$, $\delta \phi$, $\delta u$, $\delta v$.

Les sommes et les intégrales s'étendent à toutes les barres de la structure

## 2.5. Cas des matériaux élastiques linéaires

Si la structure est formée des barres dont le matériau est élastique et obéit à la loi linéaire de Hooke, on sait par RDM qu'il ∃ une relation entre un effort intérieur et son déplacement associé. (voir tableau (2.1) § 2.3.1).

Ces relations dans le cas plan des sollicitations sont :

a) $M' = EI \dfrac{d\phi'}{ds}$ ; $N' = EA \dfrac{du'}{ds}$ ; $T' = GA^* \dfrac{dv'}{ds}$

E : module de Young (d'Elasticité)

I : moment d'inertie p.r. à l'axe de flexion

$d\phi$ : angle de

A : section

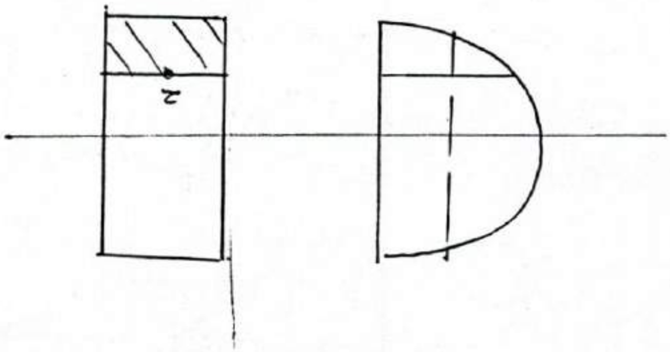
G : module de glissement (ou de Coulomb)

$A^*$ : section réduite.

$$\tau_{max} = \frac{T \, S_{max}}{I \, . \, t} = \frac{T}{A^*} \quad \text{où} \quad A^* = \frac{I \, . \, t}{S_{max}}$$

t : épaisseur

$S_{max}$ : moment statique.



$$\tau = \frac{T S}{I t}$$

$$\tau_{max} = \frac{T S_{max}}{I t} = \frac{T}{A^*}$$

où $A^* = \dfrac{I t}{S_{max}}$.

$\tau_{moy} = \dfrac{T}{A}$ Contrainte de cisaillement.

b) $\delta M = EI \dfrac{d\,\delta\phi}{ds}$ , $\delta N = EA \dfrac{d\,\delta u}{ds}$ , $\delta T = GA^* \dfrac{d\,\delta v}{ds}$

L'équation (2.11)' s'écrit alors :

a) $$\boxed{\sum P'\delta d - \sum R'\delta r = \int_0^s EI \frac{d\phi'}{ds} d(\delta\phi) + \int_0^s EA \frac{du'}{ds} d(\delta u) + \int_0^s GA^* \frac{dv'}{ds} d(\delta v)}$$

(2.12)

b) $$\boxed{\sum P'\delta d - \sum R'\delta r = \int_0^s \frac{M'\delta M}{EI} ds + \int_0^s \frac{N'\delta N}{EA} ds + \int_0^s \frac{T'\delta T}{GA^*} ds}$$ (2.13)

La forme (a) est dite purement cinématique ou géométrique et la forme (b) est dite purement mécanique ou statique.

Ces équations sont valables : pour :

→ n'importe quel état des charges statiquement admissible caractérisé par $P'$, $R'$, $\phi'$, $u'$ et $v'$ ou $P'$, $R'$, $M'$, $N'$ et $T'$

statiquement admissible :
- en équilibre
- déplacement des appuis = 0.

→ n'importe quel état de déformation et déplacement virtuel cinématiquement admissible, caractérisé par :
$\delta d$, $\delta r$, $\delta\phi$, $\delta u$, $\delta v$ ou $\delta d$, $\delta r$, $\delta M$, $\delta N$ et $\delta T$

## 2.6. Théorème du déplacement unité

Considérons une structure déformable, déformée par des forces données et / ou des déplacements imposés. On désire résoudre le problème suivant : « quelle est la valeur P de la force extérieure appliquée au pt A dans la direction $\Delta_A$ pour que la structure soit en équilibre ? »

Pour trouver cette force, donnons à la structure déformable un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible tel que seul le point A se déplace d'une quantité unitaire dans la direction $\Delta_A$, les autres forces appliquées ayant un déplacement nul. En désignant par l'indice 1 les grandeurs relatives à ce champ de déplacement particulier, le th. des déplacements virtuels (2.10) s'écrit dans ce cas :

$$\boxed{1 \cdot P = \int_V \sigma_{ij} \, (\varepsilon_{ij})_1 \, dV} \qquad (2.14)$$

où $\sigma_{ij}$ est le champ des contraintes réelles dans la structure chargée par commodité par des forces et / ou déplacements réels (supprimant l'indice ')

$(\varepsilon_{ij})_1$ est un champ de déformation quelconque cinématiquement admissible avec le déplacement unité i.e qui déplace A seul de l'unité dans la direction $\Delta_A$

Dans le cas particulier où la structure sollicitée dans son plan est formée des barres faites de matériaux élastiques linéaires, on applique (2.12) ou (2.13) au lieu de (2.10) et on trouve

$$\boxed{1P = \int_0^s EI \frac{d\phi}{ds} \frac{d\phi_1}{ds} \cdot ds + \int_0^s EA \frac{du}{ds} \cdot \frac{du_1}{ds} ds + \int_0^s GA^* \frac{dv}{ds} \frac{dv_1}{ds} ds}$$

(2.15)

où $\frac{d\phi}{ds}, \frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$ sont les déformations courantes réelles par commodité de la structure considérée dues aux charges extérieures réelles

et $\frac{d\phi_1}{ds}, \frac{du_1}{ds}, \frac{dv_1}{ds}$ sont les déformations courantes virtuelles (i.e qlcques) compatibles avec déplacement unité.

ou encore :

$$\boxed{1P = \int_0^s \frac{MM_1}{EI} ds + \int_0^s \frac{NN_1}{EA} ds + \int_0^s \frac{TT_1}{GA^*} ds} \quad (2.16)$$

où M, N, T sont des élts de réduction réels par commodité en équilibre avec les charges extérieures sur la str. considérée et

$M_1, N_1$ et $T_1$ sont des éléments de réduction virtuels dus au déplacement unité.

si la barre est rectiligne d'axe x et sollicitée dans l'espace, la formule (2.15) se généralise en ;

$$1.P = \int_{struct.} \left( EA \frac{du}{dx} \cdot \frac{du_1}{dx} + EI_y \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2w_1}{dx^2} + EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2v_1}{dx^2} + GA_y^* \frac{dv}{dx} \frac{dv_1}{dx} + GA_z^* \frac{dw}{dx} \frac{dw_1}{dx} + GJ \frac{d\psi}{dx} \frac{d\psi_1}{dx} \right) dx \quad (2.17)$$

Hugues Kumeso (10) C.S. M.

Les formules (2.14) à (2.17) constituent le th. de déplacement unité.

La forme mécanique de (2.17) est donnée par :

(2.17b)

## 2.7. Théorème des forces virtuelles ou du travail virtuel complémentaire pour les structures déformables

(1) examen : énoncé le th. des forces virtuelles pour les str. indéformables ; à quoi peut servir ce th.

Considérons à nouveau un solide déformable. Appliquons lui un champ des forces et contraintes virtuelles en équilibre, indépendamment des forces qui le charge réellement qu'il supporte réellement. Durant le changement réel de configuration (déformation) qui le soumet à un champ de déplacement $\vec{u}$ et au champ de déformation $\varepsilon_{ij}$ correspondant, les forces extérieures virtuelles de volume $\delta\vec{F}\cdot dV$ et de surface $\delta\vec{T}\,dA$ effectuent le travail $\delta W^*$ suivant dit travail virtuel extérieur complémentaire.

$$\boxed{\delta W^* = \int_V \delta F_i\, u_i\, dV + \int_A \delta T_i\, u_i\, dA}$$ (2.18)

où la 1ère intégrale triple s'étend à l'ens. des élts de volume dV du corps entier, et la 2nd intégrale double s'étend à toute la surface extérieure A du solide.

On appelle travail virtuel de déformation complémentaire (ou complementaire intérieur), et on note $\delta U^*$ l'expression :

$$\boxed{\delta U^* = \int_V \delta\sigma_{ij}\, \varepsilon'_{ij}\, dV} \qquad (2.19)$$

→ $\varepsilon'_{ij}$ est un champ de déformations cinématiquement admissible que l'on considère généralement comme étant les déformations vraies et l'on note $\varepsilon_{ij}$ ; et

→ $\delta\sigma_{ij}$ est un champ de contrainte statiquement admissible.

En élasticité, on démontre que :

$$\boxed{\delta W^* = \delta U^*} \qquad (2.20.a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V \delta\sigma_{ij}\, \varepsilon'_{ij}\, dV = \int_V \delta F_i\, u_i\, dV + \int_A \delta T_i\, u_i\, dA} \qquad (2.20.b)$$

ces expressions traduisent le th. des forces virtuelles ou des travail virtuel compl. qui s'énonce de la façon suivante :

« si les déformations et les déplacements d'un corps sont cinématiquement admissibles, le travail virtuel complémentaire des déformation est égal au travail virtuel complémentaire extérieur pour tout système des forces virtuelles en équilibre. »

Rmq : → ce th. est une condition nécessaire et suffisante pour garantir la compatibilité cinématique i.e les déformations du solide. Son emploi conduit à des conditions de compatibilité.

→ Le dit th. est aussi indépendant de la nature du matériau constituant le corps.

## 2.8. Expressions explicites des travaux $\delta U^*$ et $\delta W^*$

On procède d'une manière analogue à celle du § 2.3.

### 2.8.1. Travail virtuel complémentaire de déformation

— Cas de barres sollicitées dans le plan

$$\boxed{\delta U^* = \int_0^s \delta N \, du' + \int_0^s \delta M \, d\phi' + \int_0^s \delta T \, dv'} \quad (2.21).$$

### 2.8.2. Travail virtuel complémentaire extérieur i.e des forces ext. virt.

On a :

$$\boxed{\delta W^* = \sum d' \delta P - \sum r' \delta R} \quad (2.22)$$

## 2.9. Expression explicite du th. des forces virtuelles pour les corps déformables

Pour un corps déformable, en toute généralité, on peut écrire :

$$\boxed{\sum d' \delta P - \sum r' \delta R = \int_V \varepsilon_{ij}' \, \delta \sigma_{ij} \, dv} \quad (2.23)$$

et pour une structure composée des barres, sollicitées dans le plan on a :

$$\boxed{\Sigma d'\delta P - \Sigma r'\delta R = \int_0^s \delta N\, du' + \int_0^s \delta M\, d\phi' + \int_0^s \delta T\, dv'} \quad (2.24)$$

ces équations sont valables pour n'importe quel champ de déplacement ou de déformation continu, dérivable et respectant les conditions d'appuis i.e pour tout champ cinématiquement admissible, caractérisé par les symboles $d'$, $r'$, $v'$, $\phi'$, $\varepsilon'_{ij}$ et pour tout état de contrainte et charge virtuel statiquement admissible caractérisé par les symboles $\delta P$, $\delta R$, $\delta N$, $\delta M$, $\delta T$ et $\delta \sigma_{ij}$.

## 2.10. Cas des matériaux élastiques linéaires

Avec (2.24) et en considérant $du' = \varepsilon' ds = \frac{N'}{EA} ds$ ; $d\phi' = \frac{M'}{EI} ds$ et $dv' = \frac{T'}{GA^*} ds$

On obtient la forme mécanique.

$$\boxed{\Sigma d'\delta P - \Sigma r'\delta R = \int_0^s \frac{M'}{EI}\delta M\, ds + \int_0^s \frac{N'\delta N}{EA}\, ds + \int_0^s \frac{T'\delta T}{GA^*}\, ds} \quad (2.25)$$

TD : L'étudiant trouvera la forme cinématique

Rmqs : les seconds membres de (2.13) et (2.25) sont égaux : ce qui traduit le fait que pour les matériaux élastiques linéaires les travaux

$$\boxed{\delta U = \delta U^*}$$

On a donc entre les premiers membres l'égalité :

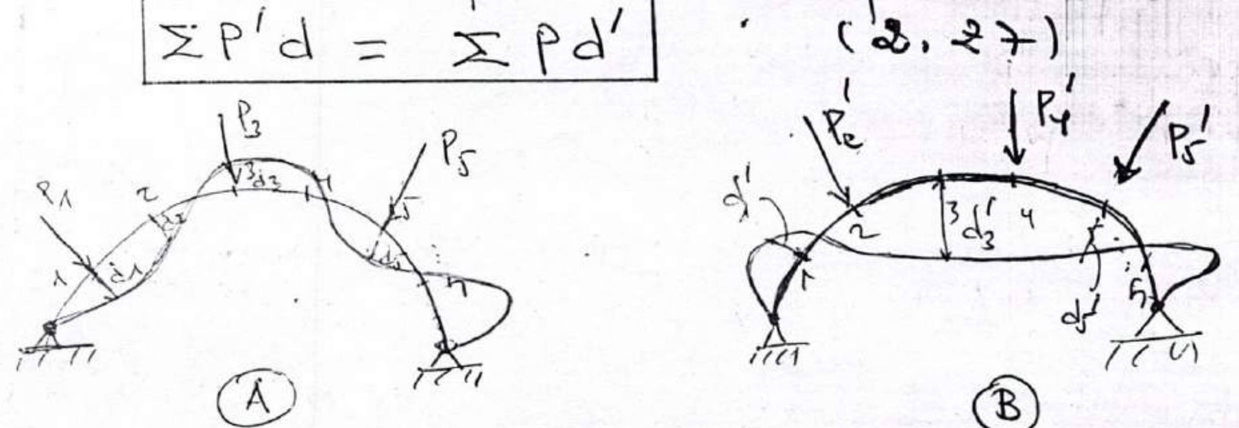
$$\boxed{\Sigma P'\delta d - \Sigma R'\delta r = \Sigma d'\delta P - \Sigma r'\delta R} \quad (2.26)$$

Cette expression est appelé théorème de réciprocité de Betti.

En effet, négligeons pour simplifier les tassements d'appuis et considérons que $\delta P \equiv P$ et $\delta d \equiv d$ sont les forces et les déplacements quelconques mais vrais d'un premier état A d'une structure et $P'$ et $d'$ sont les forces et les déplacements vrais (…) de la même structure mais dans un deuxième état B.

On a la forme classique de Betti

$$\boxed{\Sigma P' d = \Sigma P d'} \quad (2.27)$$




$$P_1 d'_1 + P_3 d'_3 + P_5 d'_5 = P'_2 d_2 + P'_4 d_4 + P'_5 d_5$$

[Note : Maxwel avait trouvé cette ex].

En particulier si l'état A correspond à la seule force unitaire $P = 1$ et l'état B à la seule force unitaire $P' = 1$ et si le corps est élastique et est formé des barres chargées dans leurs plans, on trouve grâce à la relation (2.25) :

$$\boxed{d_{12} = d_{21} = \int_0^s \frac{M_1 M_2}{EI}\, ds + \int_0^s \frac{N_1 N_2}{EA}\, ds + \int \frac{T_1 T_2}{GA^*}\, ds} \quad (2.28)$$

qui est l'expression explicite du th. de Maxwell pour les structures formées des barres

## 2.11. théorème de la force unité

Considérons une structure déformable soumise à des charges diverses. On désire résoudre le problème suivant :

« quelle est la valeur du déplacement d au point A de la structure en équilibre projeté sur la direction donnée $\Delta_A$ ? »

Pour résoudre ce problème, appliquons le th. des forces virtuelles en sélectionnant un syst. des forces virtuelles qui conduit à une expression de $\delta W^*$ ne contenant que les déplacements désirés.

D'après la formule (2.22) il ne faut appliquer qu'une seule force unitaire dans la direction $\Delta_A$.

En désignant par l'indice 1 les grandeurs relatives à champ de force particulier et en laissant tomber le signe prime (') pour les grandeurs vraies, le th. des forces virtuelles (2.23) s'écrit :

$$\boxed{1 . d = \int_V \varepsilon_{ij} \, (\sigma_{ij})_1 \, dV} \qquad (2.24)$$

où $\varepsilon_{ij}$ est un champ de déformations réelles par commodité dans la structure due à la sollicitation réelle ; et

$(\sigma_{ij})_1$ est un champ de contrainte q'cq (virtuel) en équilibre avec la force unité.

Dans le cas particulier où la structure est formée des barres sollicitées dans leurs plans faites d'un matériau élastique linéaire, appliquons la formule (2.25) forme mécanique, nous aurons :

$$\boxed{1 \cdot d = \int_0^s \frac{MM_1}{EI} ds + \int_0^s \frac{NN_1}{EA} ds + \int_D^s \frac{TT_1}{GA^*} ds} \quad (2.30)$$

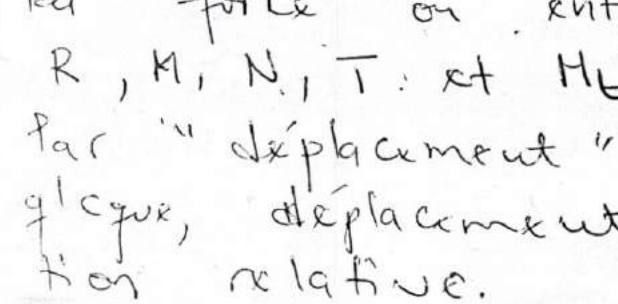
où M, N et T sont les éléments de réduction courant réels dus à la déformation réelle de la structure.
et $M_1$, $N_1$, $T_1$ sont les éléments de réduction courant quelconque en équilibre avec la force unité :
Si la barre est rectiligne d'axe $x$ et sollicitée dans l'espace ; (2.30) devient :

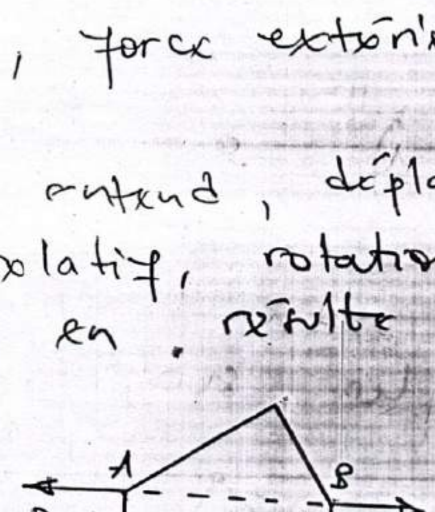
$$\boxed{1 \cdot d = \int_{structure} \left( \frac{M_y M_{y1}}{EI_y} + \frac{M_z M_{z1}}{EI_z} + \frac{T_y T_{y1}}{GA_y^*} + \frac{T_z T_{z1}}{GA_z^*} + \frac{NN_1}{EA} + \frac{M_t M_{t1}}{GJ} \right) dx} \quad (2.31)$$

Les formules (2.29) à (2.31) constituent le th. de la force unité.

~~Paragraphe~~ 2.12. <u>Corollaires</u>

Les mots " forces " et " déplacements " ont dans ce chapitre ont le sens général
Par "force" on entend, force extérieure q/cque R, M, N, T et $M_t$
Par " déplacement " on entend, déplacement q/cque, déplacement relatif, rotation, rotation relative. Il en résulte que :

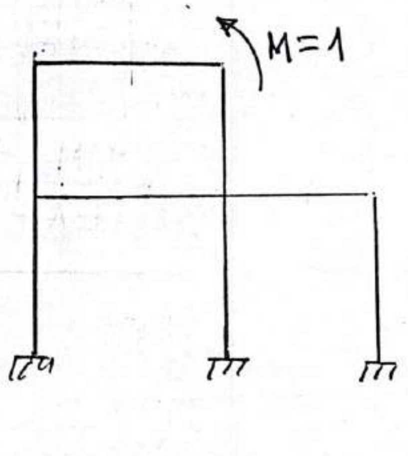


a) si l'on désire connaître la variation des distances entre A et B par suite d'une déformation élastique linéaire de cette dernière i-e due à n'importe quoi, on adopte comme état de charge virtuelle, deux forces unitaires P = 1 de sens opposés ayant A B comme alignement. voir fig.. ci-dessus. c'est l'application directe de (2.25) :

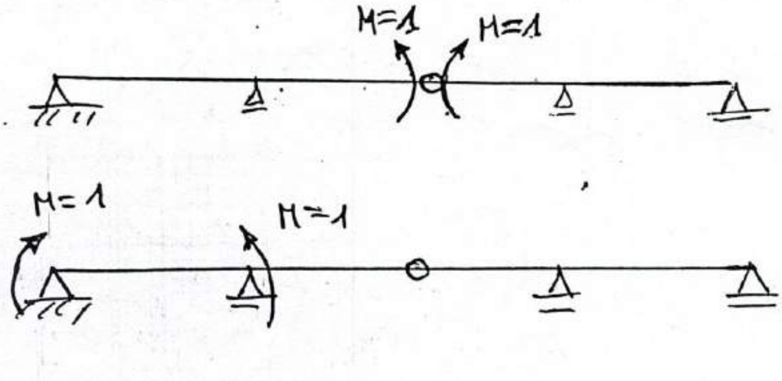
- le membre de dte donne la variation cherchée.

b)



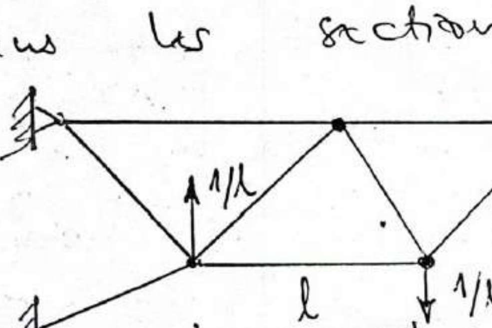

on obtient la rotation d'une section de la structure par la formule (2.30) ou (2.31) en appliquant un moment unitaire M = 1 dans la section considérée voir fig.. ci-contre.

c)



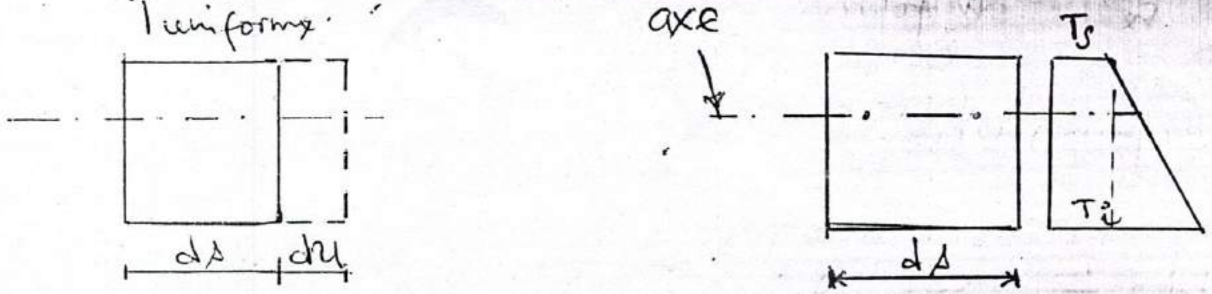

on obtient la rotation relative de deux sections en considérant comme état de charge virtuel deux moment unitaires M = 1 de sens opposés dans les sections considérées.

d)



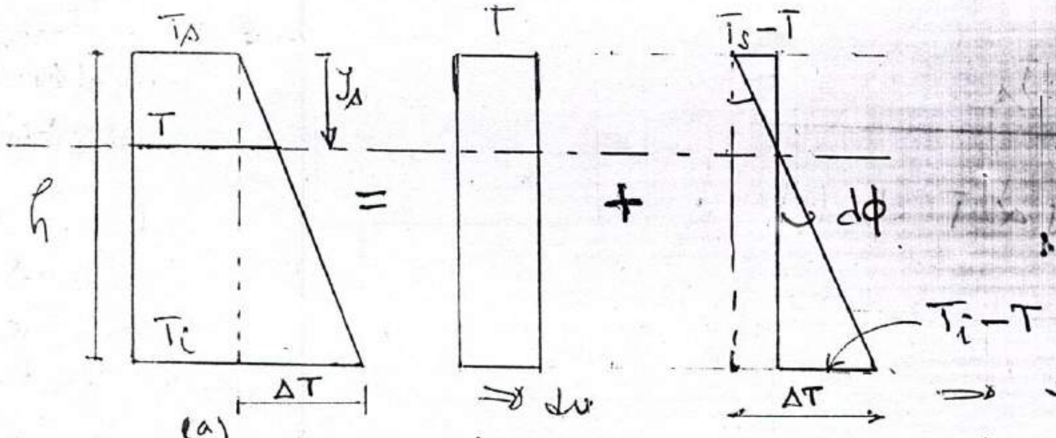

on trouve la rotation en bloc d'une barre d'une poutre en treillis de longueur l en appliquant un couple virtuel unitaire sur cette barre que l'on fait agir à l'aide de deux forces 1/1 de sens opposés agissant normalement (i.e perpendiculairement) à la barre mais sur ces noeuds comme sur la figure ci-dessus.

## 2.13. Cas de déformation thermique ou due au tassement




variation uniforme de t°

variation linéaire de t°




$\Rightarrow du$ $\Rightarrow d\phi$

(a)

On peut étudier le déplacement du à une variation de t° T d'un point qlcq, dans une direction qlcq. de la str. par le th. de la force unité.

- On adopte un état de charge statiquement admissible correspondant à $P = 1$ au point considéré dans la direction considérée et comme état de déformation, la déformation thermique. On a pour une barre, le coeff. de dilatation thermique $\alpha$ soumise à une variation de température (voir fig a) $du = \alpha T ds$

ainsi le th. (2-30) s'écrira :

$$\boxed{1 \cdot d = \int_{str} N_1 \alpha T \, ds} \qquad (2 \cdot 32)$$

si un petit tronçon de poutre (cas plan) est soumis à une variation linéaire de la température sur sa hauteur ($T_s$ à la fibre supérieure et $T_i$ à la fibre inférieure) il se déforme en trapèze comme en flexion composée plane de sorte que par superposition (V. fig b) :

$$\left.\begin{aligned} du &= \alpha T \, ds \\ d\phi &= \frac{\alpha \Delta T \, ds}{h} \end{aligned}\right\} \qquad \text{avec } T = T_s + \frac{\Delta T \cdot y_s}{h}$$

c'est la variation de la t° à l'axe moyen

$\Delta T = T_i - T_s$ , la formule (2.30) devient

$$\boxed{1 \cdot d = \int_{str} N_1 \alpha T \, ds + \int_{str} M_1 \frac{\alpha \Delta T}{h} ds} \qquad (2 \cdot 33)$$

de la même manière le traitement des constructions en B.A se fait pour

En général avec variation de t° et tassement en plus des charges extérieures ; (2.30) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} 1 \cdot d = &\int_{str} \frac{N N_1}{EA} ds + \int \frac{T\,T_1}{GA^*} ds + \int_{str} \frac{M M_1}{EI} ds + \int_{str} N_1 \alpha T \, ds \\ &+ \int_{str} M_1 \frac{\alpha \Delta T}{h} ds + \sum R_1 r \end{aligned}} \qquad (2 \cdot 34)$$

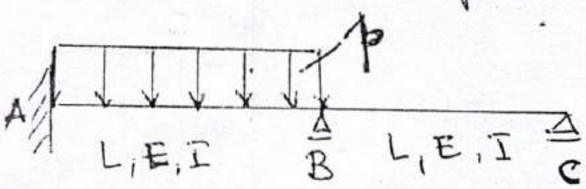
où $r$ est le tassement d'appuis (supposé connu) et $R_1$ est la réaction d'un appui due à la ~~force~~ unité $1$

## 2.14. Applications

En pratique dans le cas des poutres fléchies on néglige les déformations dues à l'effort tranchant (T) et à l'effort normal (N), dans les barres telles que les tirants, les sup-portes il ne faut pas négliger l'effet des N qui sont les sollicitations principales

### 2.14.1. Application du th. du déplacement unité

Soit la poutre suivante




on demande de trouver la réaction verticale en C ?

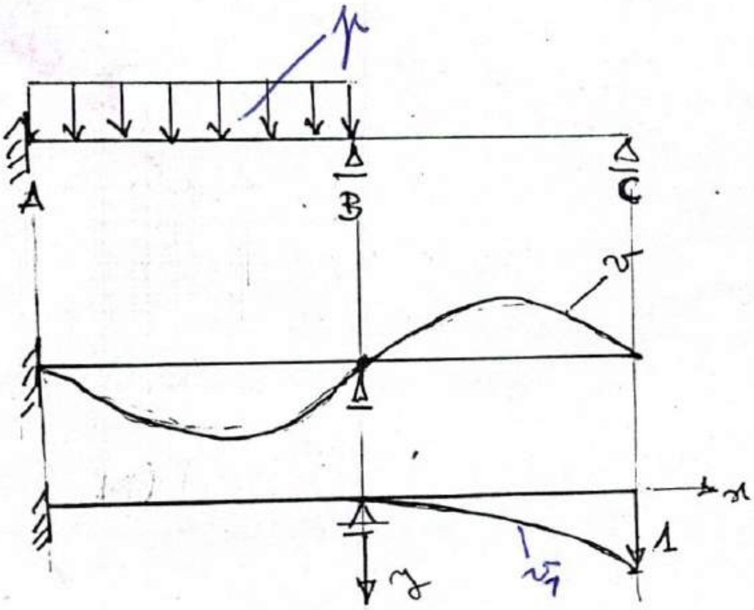
- énoncer le th. de travaux virtuels complémentaire pour le cas de solide Indéformable et à quoi peut servir ce théorème.

le th. du déplacement unité (2.15) est (2.17) s'écrit en ne considérant que la flexion :

$$R_C = \int_{poutre} EI\, v'' v_1'' \, dx \qquad (a)$$

où $v$ = déplacement réel dû à la charge $p$.

$v_1$ = déplacement virtuelle ~~à la charge~~ dû au déplacement unité.




où les déplacements réels $v$ sont supposés connus.

$v''$ sur BC ( car $v_1'' \equiv 0$ sur AB)

$\Rightarrow v'' = pL(L-x)/28EI$

( donnée sur formulaire)

et $v_1''$ sur BC = ?

$v_1 = ax^2 + bx + c$ où $v_1(0) = 0$ ; $v_1'(0) = 0$ et $v_1(L) = 1$

D'où $v_1 = \frac{x^2}{L^2}$ et $v_1'' = \frac{2}{L^2}$ et sur AB ; $v_1 = 0$.

D'où $R_C = \int_0^L EI \frac{pL(L-x)}{28\,EI} \cdot \frac{2}{L^2}\,dx = \frac{pL}{28}$

Note : $R_C$ a le même sens que le déplacement unité.

Le signe positif indique que $R_C$ agit dans le même sens que celui choisi pour le déplacement unité.

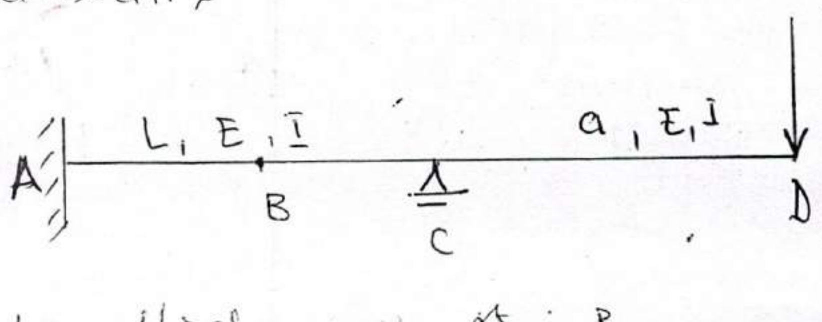
Rmq : Le th. de déplacement unité tel qu'appliqué i.e permettant de calculer la force maintenant une structure chargée en équilibre en général une réaction d'appui, ~~est~~ d'utilité pratique très faible. En effet il suppose la connaissance de la déformée ou des éléments de réduction de la structure réelle qui nécessite la connaissance de réactions d'appuis qui justement sont recherchées ! sauf si l'on

Hugues · Kumeso (16) c.s. 17.

dispose d'un formulaire

2.14.2 Appl. du théorème de la force unité

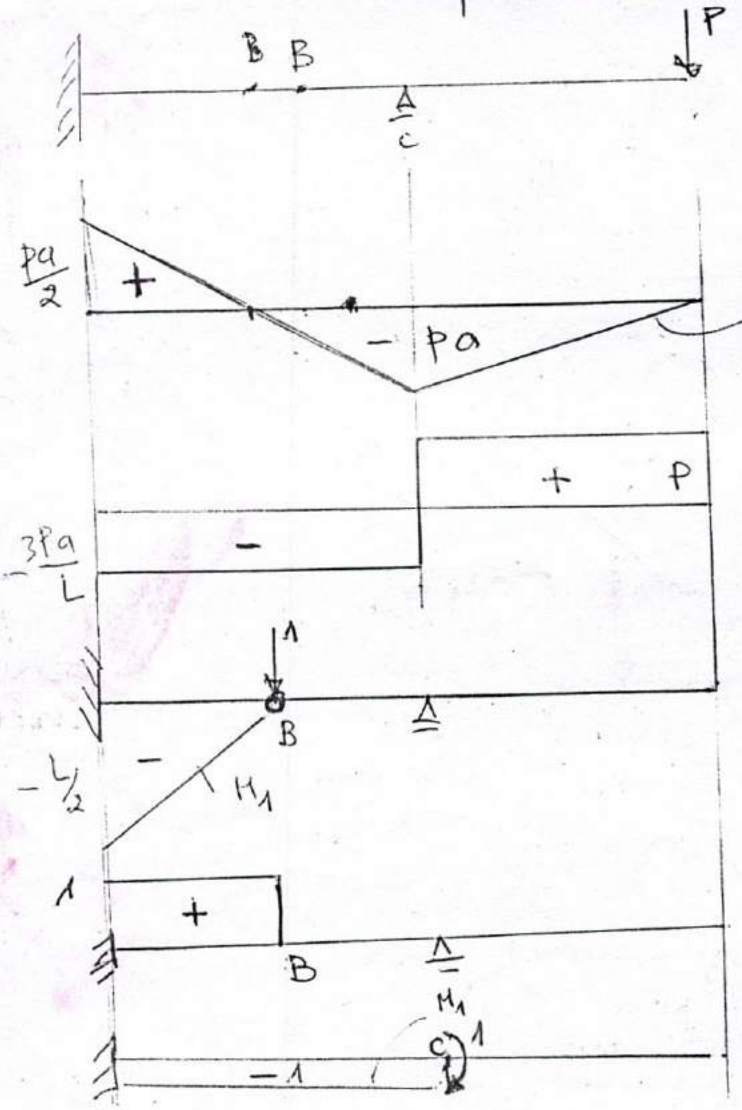
Trouver la flèche au milieu B de AC et l'angle de rotation en C de la poutre ci-dessous : matériau est élastique linéaire




(a) poutre donnée 1 fois Hypers.

1. flèche au pt B

(2.30) $$f_B = \int_{poutre} \frac{M M_1}{EI}\, ds + \int_{poutre} \frac{T\, T_1}{GA^*}\, ds \quad (a)$$




(a) poutre donnée 1 fois hyper.

b) M et T réels, supposés connus

c) $M_1$ et $T_1$ statiquement admissible avec $P=1$

d) $M_1$ et $T_1=0$, statiquement admissible avec $M=1$

les M et T réels sont supposés connus (voir fig. b).

Pour choisir une ~~solution~~ sollicitation virtuelle $M_1$ et $T_1$ avantageuse, le plus simple est de la déduire d'une structure isostatique habilement tirée de la structure donnée, si elle est hyperstatique afin de réduire le volume de calculs. En effet, la seule condition à respecter est que l'état statique virtuelle soit en équilibre. La dite structure isostatique pourra varier d'un calcul du déplacement à l'autre. D'où par (a) :

$$f_B = \int_0^{L/2} \frac{Pa}{2}\left(1-\frac{3x}{L}\right)\left(x-\frac{L}{2}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^L \left(-\frac{3Pa}{2L}\cdot 1\cdot\frac{dx}{GA^*}\right)$$

$$= -\left(\frac{PaL^2}{32EI} + \frac{3Pa}{4GA^*}\right)$$

-> Le signe négatif montre que ce déplacement se produit dans le sens inverse à celui de la charge unité.

-> Le 2e terme de $f_B$ dû à T est négligeable (voir rmq au début du § sur les ~~applic~~ applications).

B. L'Angle de rotation $\phi$ au pt C

La figure d. montre $M_1$ et $T_1$ statiquement admissible à $M = 1$ en C obtenu en omettant l'appui en C (pour rendre isostatique). D'où

$$\phi_C = \int_0^L \frac{MM_1}{EI}dx = \int_0^L \frac{Pa}{2}\left(1-\frac{3x}{L}\right)(-1)\,dx = \frac{PaL}{4EI}$$

Hugues KUMESO (17) C.S. 18

Rmq : L'application du th. de la force unité ou le calcul de déplacement suppose que l'on connaisse les éléments de (la structure) réduction réels de la structure étudiée ce qui est évident si la str. est iso. pour les struct. hyper. On commence par chercher M, N et T comme dans la suite du cours par l'une de deux méthodes générales ou par leur cas particuliers.

## 2.15. Commentaire

Il y a dualité entre le th. des déplacements virtuels (th. du dépl. unité) et celui des forces virtuelles (th. de la force unité). En effet le premier se basant sur des déformations virtuelles compatibles exprime les équations d'équilibres. Il est à la base de la 1ère méthode générale de résolution des str. hyperstatiques : la méthode des déplacements. Dans cette méthode les inconnues sont les déplacements de certains points de la structure ; à l'aide du th. des déplacements virtuels on établi un nbre d'équations d'équilibre égal au nbre d'inconnues que l'on résoud. Les dits déplacements étant liés aux réactions hyperstatiques.

Le 2nd th. employant un syst. des forces virtuelles en équilibre, exprime des conditions de déformations autrement dit de compatibilité géométrique. Il est à la base de la 2nde méthode générale de résolution des structures hyperstatiques, la méthode des forces. Ici, les inconnues sont des forces intérieures ~~hyperstatiques~~ (M, N, T, Mt) en divers points de la structure. A partir du th. des forces virtuelles, on établit un nombre d'équations de compatibilité de déplacement égal à ce nbre d'inconnues, que l'on résoud.

Hugues KUMESO (18) C.S. 18'

TP : Enoncer et démontrer le théorème de travail virtuel complémentaire pour les structures indéformables ; à quoi peut servir ce théorème ?

Résol

considérons un corps indéformable ; appliquons lui un champ de force virtuelles en équilibre, qui le charge indépendament des forces qu'il supporte réellement.
Durant le chargement réel de configuration qui le soumet à un champ de déplacement $\bar{u}$ et de déformation $\varepsilon_{ij}$ (= 0 car indéformable), les forces extérieures virtuelles de volume $\delta F\,dV$ et de surface $\delta T\,dA$ effectue le travail $\delta W^* = \int_V \delta F_i u_i dV + \int_A \delta T_i dA$

Le travail complémentaire de déformation vaut $\delta U^* = \int_V \delta \sigma_{ij}\, \varepsilon'_{ij}\, dV$ où $\varepsilon_{ij}$ déformation vrai. Pour un corps indéformable, $\varepsilon'_{ij} = 0 \Rightarrow \delta U^* = 0$.
or d'après l'élasticité, $\delta W^* = \delta U^*$

$\Rightarrow \boxed{\delta W^* = 0}$ D'où le théorème !

or Pour tout système indéformable et pour tout système de forces virtuelles en équilibre sur le corps indéformable, le travail virtuel complémentaire est nul"

ce th. ne sert à rien